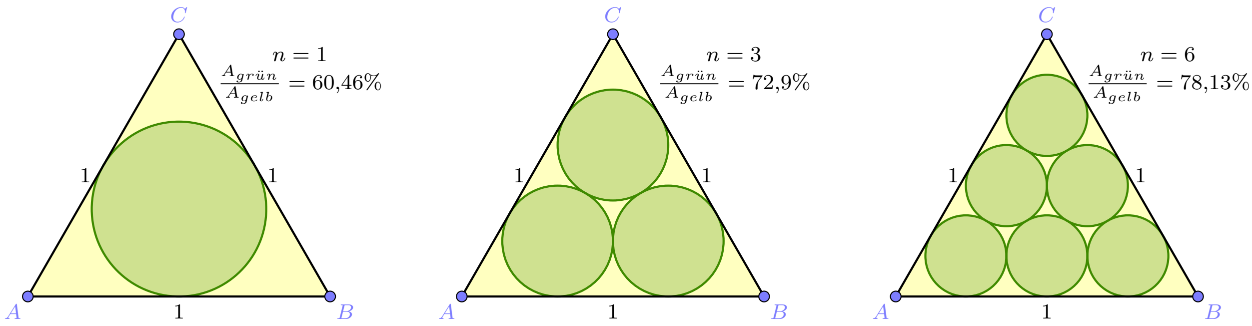
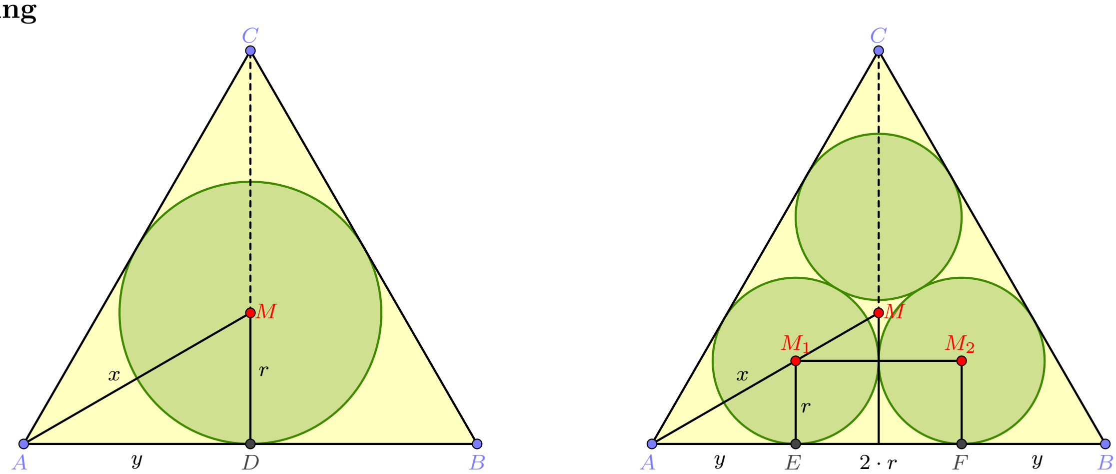
Mit Kreisen gefülltes gleichseitiges Dreieck

Auf der Basis eines gelb ausgefüllten gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $a = 1$ liegt ein grüner Inkreis. Die Anzahl der grünen Kreise auf der Basis wird in dem Dreieck stets um einen Kreis erhöht und zu einer Pyramide ergänzt. Damit erhöht sich die Gesamtzahl n der Kreise und somit der Anteil der grünen Kreisfläche gegenüber der gelben Dreiecksfläche.
Welchen Anteil an der Dreiecksfläche nehmen die grünen Kreise ein, wenn $n \to \infty$?



Aufgabe auf Twitter https://twitter.com/TamasGorbe/status/1319975198423240704 von Tamás Görbe vom 24.Oktober 2020

Lösung



Im gleichseitigen Dreieck liegt der Schwerpunkt M auf $\frac{1}{3}$ der Höhe $h = \overline{DC}$.
Für das gleichschenklige Dreieck ΔAMC gilt $x = \frac{2}{3} \cdot h$.
Es ist $h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}$ und x somit $x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a$ ...(1).
Nach dem Satz von Pythagoras ist im Dreieck ΔADM $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 = x^2$ ...(2).
(1) nach a umgestellt, ist $a = \sqrt{3} \cdot x$, in (2) eingestzt, wird zu $\frac{3}{4} \cdot x^2 + r^2 = x^2$,
nach x aufgelöst $x = 2 \cdot r$ ...(3).
y kann mit (3) ermittelt werden, aus $y^2 + r^2 = (2 \cdot r)^2$ wird $y = \sqrt{3} \cdot r$ ...(4).
Die Dreiecke ΔADM und ΔAEM_1 sind einander ähnlich, so dass in jedem Eckkreis $x = 2 \cdot r$ und $y = \sqrt{3} \cdot r$. Der Radius eines Kreises r_K errechnet sich mit Hilfe der Grundseite a

für einen Kreis auf a	$1 = 2 \cdot y$,	$1 = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r$,	$r = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}}$,
für zwei Kreise auf a	$1 = 2 \cdot y + 2 \cdot r_2$,	$1 = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r_2 + 2 \cdot r_2$,	$r_2 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} + 2}$,
für drei Kreise auf a	$1 = 2 \cdot y + 4 \cdot r_3$,	$1 = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r_3 + 4 \cdot r_3$,	$r_3 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} + 4}$,
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
für k Kreise auf a	$1 = 2 \cdot y + 2 \cdot (k-1) \cdot r_k$,	$1 = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r_k + 2 \cdot (k-1) \cdot r$,	$r_k = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot (k-1)}$.

Die Gesamtzahl n der Kreise in dem Dreieck kann mit der Formel $n = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$ ermittelt werden. Da auf der Basis k-Kreise liegen, bleiben für die darüberliegenden Kreise nur noch $\frac{k \cdot (k-1)}{2}$ Kreise übrig, da $n = k + \frac{k \cdot (k-1)}{2}$. Die Flächeninhalte können nun bestimmt werden.

grüne Gesamtfläche $A_{grün}(k) = n \cdot \pi \cdot r_k^2,$ $\quad A_{grün}(k) = \frac{k\cdot(k+1)}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}+2\cdot(k-1)}\right)^2,$

$A_{grün}(k) = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{k^2+k}{\left(\sqrt{3}+k-1\right)^2},$ $\quad A_{grün}(k) = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{k^2+k}{k^2+2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot k-2\cdot\sqrt{3}+4}$

gelbe Dreiecksfläche $A_{gelb} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3},$ $\quad A_{gelb} = \frac{\sqrt{3}}{4},$

Verhältnis bilden $\frac{A_{grün}(k)}{A_{gelb}} = \frac{\frac{\pi}{8}\cdot\frac{k^2+k}{3+2\cdot\sqrt{3}\cdot k+k^2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}},$ $\quad \frac{A_{grün}(k)}{A_{gelb}} = \frac{\pi}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot \frac{k^2+k}{k^2+2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot k-2\cdot\sqrt{3}+4},$

Grenzwert G bilden $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{A_{grün}(k)}{A_{gelb}} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{\pi}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot \frac{k^2+k}{k^2+2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot k-2\cdot\sqrt{3}+4}\right),$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A_{grün}(k)}{A_{gelb}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\pi}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot \frac{\cancel{k^2}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\cancel{k^2}\cdot\left(1+\frac{2\cdot(\sqrt{3}-1)}{k}-\frac{2\cdot\sqrt{3}-4}{k^2}+\right)}\right),$$

$G = \frac{\pi}{2\cdot\sqrt{3}},$ $\quad \underline{\underline{G \approx 90{,}69\%}}.$

Die Kreisflächen nehmen einen Anteil von rund 90,7% der Dreiecksfläche ein, wenn $n \to \infty$.