Goniometrische Gleichung 1

Man löse die Gleichung $sin\ x - cos\ x = 4 \cdot sin\ x \cdot cos^2 x$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2021-8 aus der Zeitschrift „Die Wurzel“ von Oleh Faynshteyn, Leipzig, vom Februar 2021

Lösung

Mit $cos^2 x = 1 - sin^2 x$ ist $\quad sin\ x - cos\ x = 4 \cdot sin\ x \cdot (1 - sin^2 x)$,

$sin\ x - cos\ x = 4 \cdot sin\ x - 4 \cdot sin^3 x$,

$cos\ x = 4 \cdot sin^3 x - 3 \cdot sin\ x$, $\quad cos\ x = sin\ x \cdot (4 \cdot sin^2 x - 3)$,

$cos\ x = \sqrt{1 - sin^2 x}$ $\quad \sqrt{1 - sin^2 x} = sin\ x \cdot (4 \cdot sin^2 x - 3)$,

quadriert $\quad 1 - sin^2 x = sin^2 x \cdot (16 \cdot sin^4 x - 24 \cdot sin^2 x + 9)$,

$0 = 16 \cdot sin^6 x - 24 \cdot sin^4 x + 10 \cdot sin^2 x - 1$,

Substitution $sin^2 x = z$ $\quad 16 \cdot z^3 - 24 \cdot z^2 + 10 \cdot z - 1 = 0$ ...(1).

$\underline{z_1 = \frac{1}{2}}$ ist Lösung von (1) $\quad (16 \cdot z^3 - 24 \cdot z^2 + 10 \cdot z - 1) : (z - \frac{1}{2}) = 16 \cdot z^2 - 16 \cdot z + 2$.

Dann ist $\quad (16 \cdot z^2 - 16 \cdot z + 2) \cdot (z - \frac{1}{2}) = 0$,

Satz vom Nullprodukt $\quad 16 \cdot z^2 - 16 \cdot z + 2 = 0$, $\quad z^2 - z + \frac{1}{8} = 0$,

$z_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}}$, $\quad z_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$,

$\underline{z_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2})}$, $\quad \underline{z_3 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2})}$.

Es folgt die Rückführung $\quad sin^2 x = z_1$, $\quad sin^2 x = \frac{1}{2}$,

$sin\ x = \pm\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$, $\quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{4} \cdot \pi$,

$sin^2 x = z_2$ $\quad sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2})$, $\quad sin\ x = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2})}$,

$sin\ x = \pm\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\quad x_{3,4} = \pm\frac{1}{8} \cdot \pi$,

$sin^2 x = z_3$ $\quad sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2})$, $\quad sin\ x = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2})}$,

$sin\ x = \pm\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ $\quad x_{5,6} = \pm\frac{3}{8} \cdot \pi$.

Durch das Quadrieren entstehen Scheinlösungen, die sechs Lösungen müssen in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden, um deren Wahrheitswert zu überprüfen. Die Sinusfunktion ist ungerade, so dass $sin(-x) = -sin\ x$, die Kosinusfunktion ist gerade, so dass $cos(-x) = cos\ x$. Weiterhin ist $sin\ \frac{\pi}{4} = cos\ \frac{\pi}{4}$.

Mit $x_1 = -\frac{1}{4} \cdot \pi$ entsteht $\quad sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cdot sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$,

$-2 \cdot sin\ \frac{\pi}{4} = -4 \cdot sin\ \frac{\pi}{4} \cdot cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$,

$|: \left(-2 \cdot sin\ \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2$, $\quad 1 = 1$ w.A.

Für $x_2 = \frac{1}{4} \cdot \pi$ wird $\quad sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cdot sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$,

$0 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2$, $\quad 0 = \sqrt{2}$ f.A.

Mit $x_3 = -\frac{1}{8} \cdot \pi$ entsteht $\quad sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) - cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 4 \cdot sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \cdot cos^2\left(-\frac{\pi}{8}\right)$,

$-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot (2 + \sqrt{2})$,

$-\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot (2 + \sqrt{2})$,

$\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{(2 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})^2}$,

$\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2 \cdot (2 + \sqrt{2})}$,

quadriert $\quad 2 - \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 4 + 2 \cdot \sqrt{2}$

$4 + 2 \cdot \sqrt{2} = 4 + 2 \cdot \sqrt{2}$ w.A.

Für $x_4 = \frac{1}{8} \cdot \pi$ wird $\quad sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4 \cdot sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$,

$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2 + \sqrt{2})$,

$\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot (2 + \sqrt{2})$,

	$\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{(2-\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{2})^2}$,
	$\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2\cdot(2+\sqrt{2})}$,
quadriert	$2-\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{2}+2+\sqrt{2}=4+2\cdot\sqrt{2}$
	$4-2\cdot\sqrt{2}=4+2\cdot\sqrt{2}$ f.A.
Mit $x_5=-\frac{3}{8}\cdot\pi$ entsteht	$sin\left(-\frac{3\cdot\pi}{8}\right)-cos\left(-\frac{3\cdot\pi}{8}\right)=4\cdot sin\left(-\frac{3\cdot\pi}{8}\right)\cdot cos^2\left(-\frac{3\cdot\pi}{8}\right)$,
	$-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot(2-\sqrt{2})$,
	$-\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}})=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot(2-\sqrt{2})$,
	$\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{(2+\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{2})^2}$,
	$\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2\cdot(2-\sqrt{2})}$,
quadriert	$2+\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4-2\cdot\sqrt{2}$
	$4+2\cdot\sqrt{2}=4-2\cdot\sqrt{2}$ f.A.
Für $x_6=\frac{3}{8}\cdot\pi$ wird	$sin\left(\frac{3\cdot\pi}{8}\right)-cos\left(\frac{3\cdot\pi}{8}\right)=4\cdot sin\left(\frac{3\cdot\pi}{8}\right)\cdot cos^2\left(\frac{3\cdot\pi}{8}\right)$,
	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}=4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot(2-\sqrt{2})$,
	$\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}})=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot(2-\sqrt{2})$,
	$\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{(2+\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{2})^2}$,
	$\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2\cdot(2-\sqrt{2})}$,
quadriert	$2+\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4-2\cdot\sqrt{2}$
	$4-2\cdot\sqrt{2}=4-2\cdot\sqrt{2}$ w.A.

Damit ist die Lösungsmenge der Gleichung im Bereich von $[-\frac{\pi}{4};\frac{3\cdot\pi}{8}]$ bestimmt, sie lautet

$$L=\{x\in[-\tfrac{\pi}{4};\tfrac{3\cdot\pi}{8}]\mid\left(-\tfrac{\pi}{4},-\tfrac{\pi}{8},\tfrac{3\cdot\pi}{8}\right)\}.$$

Sie kann verallgemeinert werden für den Bereich der reellen Zahlen

$$L=\{x\in\mathbb{R}\mid\left(\left(-\tfrac{1}{4}+k\right)\cdot\pi,\left(-\tfrac{1}{8}+k\right)\cdot\pi,\left(\tfrac{3}{8}+k\right)\cdot\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}\}.$$