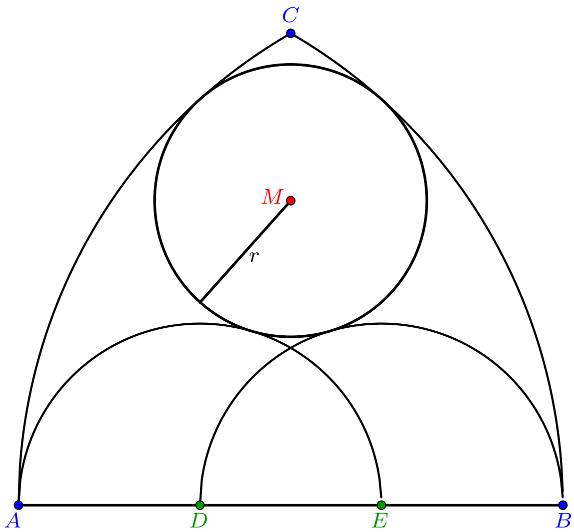
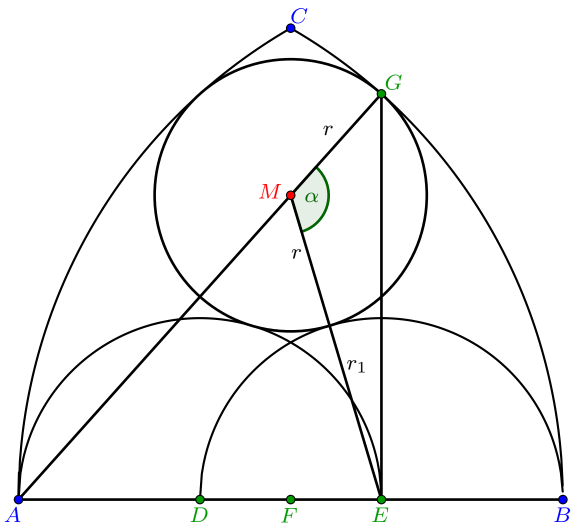
Gotisches Fenster

Das gotische Fenster kann im wesentlichen auf zwei Halbkreise, einen Kreis und zwei Kreisbögen vereinfacht werden. Die drei Abschnitte der Strecke $a = \overline{AB}$ sind gleich lang.
Drücken Sie die Basis a als Funktion des Radius r aus.



Aufgabe von www.zahlenjagd.at/aufgaben.php, Problem des Monats Dezember 2019

Lösung



Für den Flächeninhalt im Dreieck ΔEGM gilt $\quad \frac{1}{2} \cdot \overline{EG} \cdot \overline{FE} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (r + r_1) \cdot sin\,(\alpha)$,

mit $\overline{EG} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot a\right)^2}$, $\overline{EG} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5} \cdot a \quad \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5} \cdot a \cdot \overline{FE} = r \cdot (r + r_1) \cdot sin\,(\alpha)$,

mit $\overline{FE} = \frac{1}{6} \cdot a$, $r_1 = \frac{1}{3} \cdot a \quad \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5} \cdot a \cdot \frac{1}{6} \cdot a = r \cdot \left(r + \frac{1}{3} \cdot a\right) \cdot sin\,(\alpha)$,

zusammengefasst $\quad \left(r + \frac{1}{3} \cdot a\right) = \frac{\sqrt{5} \cdot a^2}{18 \cdot r \cdot sin(\alpha)}$ ...(1).

Der Kosinussatz im Dreieck ΔEGM liefert $\overline{EG}^2 = r^2 + (r+r_1)^2 - 2\cdot r\cdot (r+r_1)\cdot cos\,(\alpha)$,

$\overline{EG}^2 = 2\cdot r^2 + 2\cdot r\cdot r_1 + r_1^2 - 2\cdot r\cdot (r+r_1)\cdot cos\,(\alpha)$,

mit $\overline{EG}^2 = \frac{5}{9}\cdot a^2$, $r_1 = \frac{1}{3}\cdot a$ $\qquad \frac{5}{9}\cdot a^2 = 2\cdot r^2 + 2\cdot r\cdot \frac{1}{3}\cdot a + \frac{1}{9}\cdot a^2 - 2\cdot r\cdot \left(r+\frac{1}{3}\cdot a\right)\cdot cos\,(\alpha)$,

zusammengefasst $\qquad \frac{4}{9}\cdot a^2 = 2\cdot r^2 + 2\cdot r\cdot \frac{1}{3}\cdot a - 2\cdot r\cdot \left(r+\frac{1}{3}\cdot a\right)\cdot cos\,(\alpha)$,

zusammengefasst $\qquad \frac{4}{9}\cdot a^2 = 2\cdot r\cdot \left(r+\frac{1}{3}\cdot a\right)\cdot (1 - cos\,(\alpha))$ $\qquad$ ...(2).

(1) in (2) $\qquad \frac{4}{9}\cdot a^2 = 2\cdot r\cdot \frac{\sqrt{5}\cdot a^2}{18\cdot r\cdot sin(\alpha)}\cdot (1 - cos\,(\alpha))$,

zusammengefasst $\qquad 4 = \frac{\sqrt{5}}{sin(\alpha)}\cdot (1 - cos\,(\alpha))$,

$cos\,(\alpha) = 1 - \frac{4}{5}\cdot\sqrt{5}\cdot sin\,(\alpha)$,

$cos\,(\alpha) = \sqrt{1 - sin^2\,(\alpha)}$ $\qquad \sqrt{1 - sin^2\,(\alpha)} = 1 - \frac{4}{5}\cdot\sqrt{5}\cdot sin\,(\alpha)$,

quadriert $\qquad 1 - sin^2\,(\alpha) = 1 - \frac{8}{5}\cdot\sqrt{5}\cdot sin\,(\alpha) + \frac{16}{5}\cdot sin^2\,(\alpha)$,

zusammengefasst, $sin\,(\alpha) \neq 0$ $\qquad -sin\,(\alpha) = -\frac{8}{5}\cdot\sqrt{5} + \frac{16}{5}\cdot sin\,(\alpha)$,

$sin\,(\alpha) = \frac{8}{21}\cdot\sqrt{5}$ $\qquad$ ...(3).

(3) in (1) $\qquad \left(r+\frac{1}{3}\cdot a\right) = \frac{\sqrt{5}\cdot a^2}{18\cdot r\cdot \frac{8}{21}\cdot\sqrt{5}}$,

$48\cdot r\cdot \left(r+\frac{1}{3}\cdot a\right) = 7\cdot a^2$,

$r^2 + \frac{1}{3}\cdot r\cdot a - \frac{7}{48}\cdot a^2 = 0$,

$r_{1,2} = -\frac{1}{6}\cdot a \pm \sqrt{\frac{1}{36}\cdot a^2 + \frac{7}{48}\cdot a^2}$,

$r_{1,2} = -\frac{1}{6}\cdot a \pm \frac{5}{12}\cdot a$,

negative Lösung entfällt $\qquad r = \frac{1}{4}\cdot a$,

die Funktion lautet $\qquad a(r) = 4\cdot r$.

Der Radius r des Kreises ist viermal kleiner als die Breite a des Fensters.