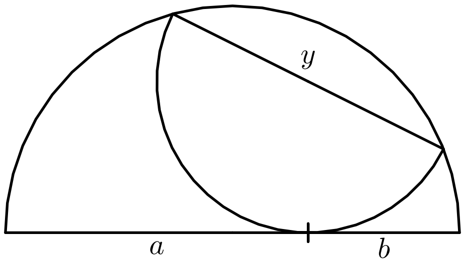
Halbkreis im Halbkreis

Ein Halbkreis enthält einen einbeschriebenen Halbkreis, der seinen Durchmesser in zwei Längen a und b teilt.

a) Welchen Durchmesser y hat der kleinere Halbkreis, wenn $a = 2$ und $b = 1$?

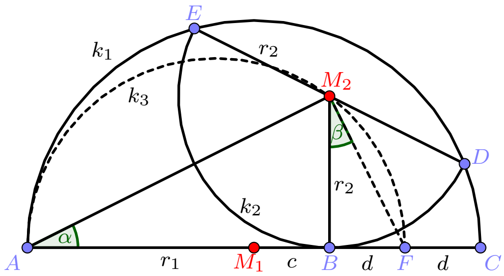
b) Welchen Durchmesser y hat der kleinere Halbkreisden in Bezug auf die Längen a und b?

c) Welche Ortskurve beschreibt der Mittelpunkt des einbeschriebenen Halbkreises?



Aufgabe von Presh Talwalker, in Mind Your Decisions vom 08.02.2022

Lösung



a) Die Halbkreise sind k_1 mit dem Radius r_1, k_2 mit dem Radius r_2 und der Thaleshalbkreis k_3, wobei k_3 so angeordnet wird, dass er durch den Mittelpunkt M_2 von k_2 verläuft. Der Durchmesser d_1 von k_1 teilt sich auf, es ist $a = r_1 + c$...(1) und $b = 2 \cdot d$...(2).
Da der Durchmesser von k_1 einen Wert von $d_1 = 3$ hat, ist $r_1 = \frac{3}{2}$. Mit $a = 2$, ist $c = \frac{1}{2}$ und da $b = 1$ ist wegen (2) auch $d = \frac{1}{2}$, bei Aufgabe a) sind die Strecken $c = d$.
Die Schenkel, die die Winkel α und β bilden, stehen paarweise senkrecht aufeinander, so dass $\alpha = \beta$. Die Dreiecke ΔABM_2 und ΔBFM_2 besitzen einen rechten Winkel. Beide Dreiecke sind nach dem Hauptählichkeitssatz zueinander ähnlich.

Dann ist	$\frac{r_2}{d} = \frac{r_1+c}{r_2}$,	$r_2 = \sqrt{d \cdot (r_1 + c)}$	...(3),
	$r_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)}$,	$\underline{\underline{r_2 = 1}}$.	

Der Durchmesser des kleinen Halbkreises beträgt $y = 2\ LE$.

b)	Allgemein ist	$2 \cdot r_1 = a + b$,	$2 \cdot (a - c) = a + b$,	
		$a - c = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$,	$c = \frac{a-b}{2}$	...(4).
	Bezüglich y ist mit (3)	$y = 2 \cdot r_2$,	$y = 2 \cdot \sqrt{d \cdot (r_1 + c)}$,	
	mit (1)	$y = 2 \cdot \sqrt{d \cdot (a - c + c)}$,	$y = 2 \cdot \sqrt{a \cdot d}$	...(5).
	Weiterhin ist	$r_1 = c + 2 \cdot d$,	$d = \frac{r_1 - c}{2}$,	
	$r_1 = a - c$	$d = \frac{a-c-c}{2}$,	$d = \frac{a-2\cdot c}{2}$	...(6).
	(6) in (5)	$y = 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{a-2\cdot c}{2}}$,	$y = 2 \cdot \sqrt{a \cdot \left(\frac{a}{2} - c\right)}$,	
	mit (4)	$y = 2 \cdot \sqrt{a \cdot \left(\frac{a}{2} - \frac{a-b}{2}\right)}$,	$y = 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{b}{2}}$,	
		$\underline{\underline{y = \sqrt{2 \cdot a \cdot b}}}$.		

Der Durchmesser des kleinen Halbkreises beträgt $y = \sqrt{2 \cdot a \cdot b}\ LE$.

c) Der Mittelpunkt M_2 des einbeschriebenen Halbkreises hat die Koordinaten

$$M_2\,(r_1 + c \mid r_2) \qquad M_2\left(a - c + c \mid \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot a \cdot b}\right),$$
$$M_2\left(a \mid \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{a \cdot b}\right).$$

Die Ortskurve des Mittelpunktes wird innerhalb des Kreises k_1 durch eine halbe Ellipsenbahn e beschrieben. Die Gleichung der Ellipse kann hergeleitet werden. Ihr Mittelpunkt ist der Punkt $M_1\left(\frac{3}{2} \mid 0\right)$. Die große Halbachse ist dann $\frac{3}{2}$, die kleine Halbachse ℓ muss bestimmt werden.

Allgemein gilt für e $\quad \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\ell^2} = 1,$ $\quad$ mit den Werten von a)

$M_2\,(2 \mid 1)$ $\quad \frac{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{1^2}{\ell^2} = 1,$ $\quad \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}} + \frac{1}{\ell^2} = 1,$

$\frac{1}{\ell^2} = \frac{8}{9},$ $\quad \ell^2 = \frac{9}{8}.$

Die Ortskurve des Mittelpunktes M_2 kann durch die Ellipsengleichung $\frac{4}{9} \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{8}{9} \cdot y^2 = 1$ beschrieben werden.