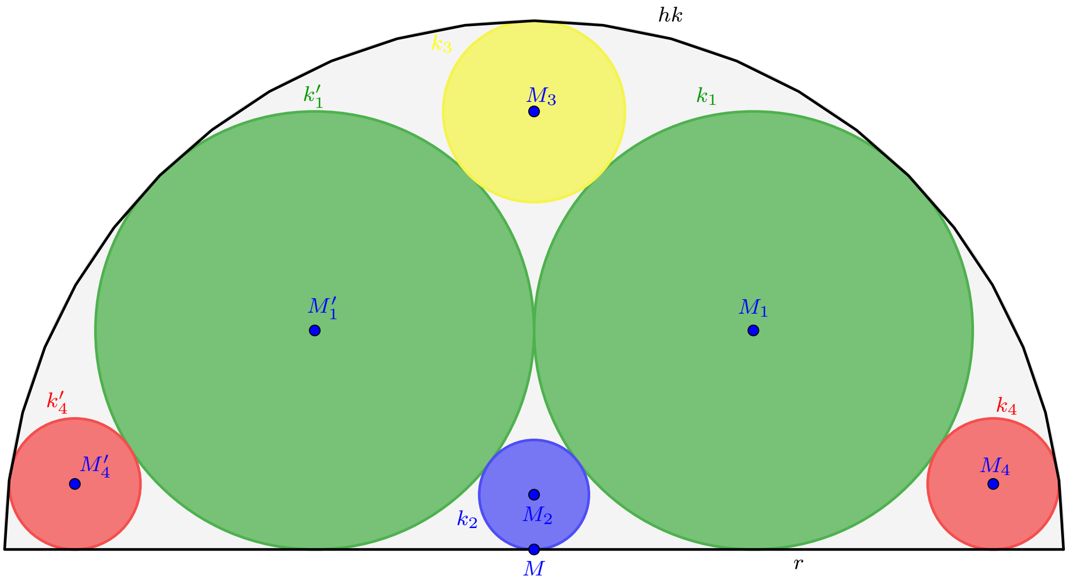
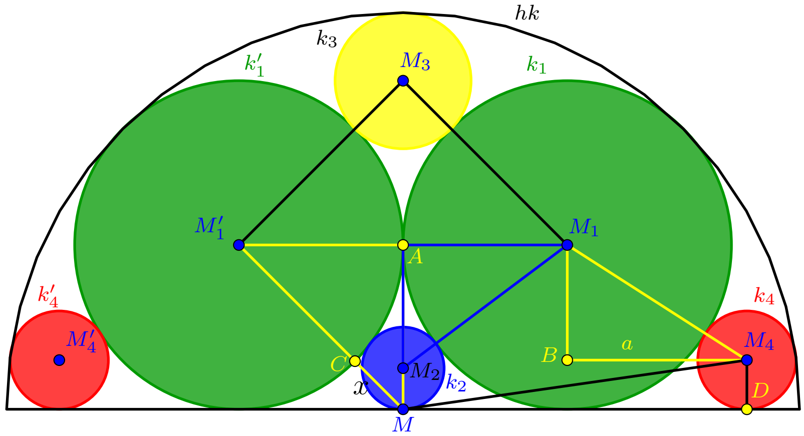
Halbkreis mit sechs Kreisen

In einem Halbkreis werden zwei gleichgroße Kreise so eingezeichnet (gün), dass sie einander berühren und außerdem die Halbkreislinie sowie den Durchmesser des Halbkreises. In die Zwischenräume werden oben (gelb) und unten (blau) sowie links und rechts (rot) weitere Kreise eingepasst.
Wie groß sind die Radien der Kreise in Abhängigkeit vom Halbkreisradius r.



Aufgabe von Heinz Klaus Strick - „Mathematik ist schön“, 2. Auflage, Kapitel 15.6 Sangaku, S.295

Lösung



Berechnung von r_1 des grün gefärbten Kreises k_1:

Im rechtwinkligen Dreieck $\Delta MAM'_1$ ist	$2\cdot r_1^2=(r_1+x)^2$,	$r_1^2=2\cdot r_1\cdot x+x^2$,
Berechnung von $x=\overline{CM}$	$x_{1,2}=-r_1\pm\sqrt{r_1^2+r_1^2}$,	$x=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot r_1$,
r_1 in Abhängigkeit von r	$r=2\cdot r_1+x$,	$r=r_1\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)$,
	$r_1=\frac{r}{\sqrt{2}+1}$,	$\underline{\underline{r_1=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot r.}}$

Berechnung von r_2 des blau gefärbten Kreises k_2:

Im rechtwinkligen Dreieck ΔM_2M_1A ist	$(r_1+r_2)^2=(r_1-r_2)^2+r_1^2$,	$4\cdot r_1\cdot r_2=r_1^2$,
	$r_2=\frac{r_1}{4}$,	$\underline{\underline{r_2=\frac{\sqrt{2}-1}{4}\cdot r.}}$

Berechnung von r_3 des gelb gefärbten Kreises k_3:

Im rechtwinkligen Dreieck $\Delta M_1' M_1 M_3$ ist $\quad (2 \cdot r_1)^2 = 2 \cdot (r_1 + r_3)^2, \quad r_1^2 = 2 \cdot r_1 \cdot r_3 + r_3^2,$

$$r_{3_{1,2}} = -r_1 \pm \sqrt{r_1^2 + r_1^2}, \qquad r_3 = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot r_1,$$

$$r_3 = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 \cdot r, \qquad \underline{\underline{r_3 = \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot r.}}$$

Berechnung von r_4 des rot gefärbten Kreises k_4:

Im rechtwinkligen Dreieck $\Delta B M_4 M_1$ ist $\quad (r_1 + r_4)^2 = (r_1 - r_4)^2 + a^2, \quad 4 \cdot r_1 \cdot r_4 = a^2 \quad ...(1).$

Im rechtwinkligen Dreieck $\Delta M D M_4$ ist $\quad (r - r_4)^2 = (r_1 + a)^2 + r_4^2 \quad ...(2).$

Aus (1) entsteht $\quad r_1 = \frac{a^2}{4 \cdot r_4} \quad ...(3),$

(3) in (2) $\quad (r - r_4)^2 = \left(\frac{a^2}{4 \cdot r_4} + a\right)^2 + r_4^2.$

Mathematica liefert die Lösung $\quad a = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)}{2 \cdot \sqrt{2} - 1} \cdot r \quad ...(4).$

(4) in (1) $\quad 4 \cdot r_1 \cdot r_4 = 4 \cdot \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(2 \cdot \sqrt{2}-1\right)^2} \cdot r^2, \quad r_1 \cdot r_4 = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(2 \cdot \sqrt{2}-1\right)^2} \cdot r^2,$

$r_1 = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot r \quad \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot r_4 = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(2 \cdot \sqrt{2}-1\right)^2} \cdot r, \quad r_4 = \frac{\sqrt{2}-1}{\left(2 \cdot \sqrt{2}-1\right)^2} \cdot r,$

$$r_4 = \frac{\sqrt{2}-1}{9 - 4 \cdot \sqrt{2}} \cdot r,$$

erweitern $\quad r_4 = \frac{\sqrt{2}-1}{9 - 4 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{9 + 4 \cdot \sqrt{2}}{9 + 4 \cdot \sqrt{2}} \cdot r, \quad \underline{\underline{r_4 = \frac{5 \cdot \sqrt{2} - 1}{49} \cdot r.}}$