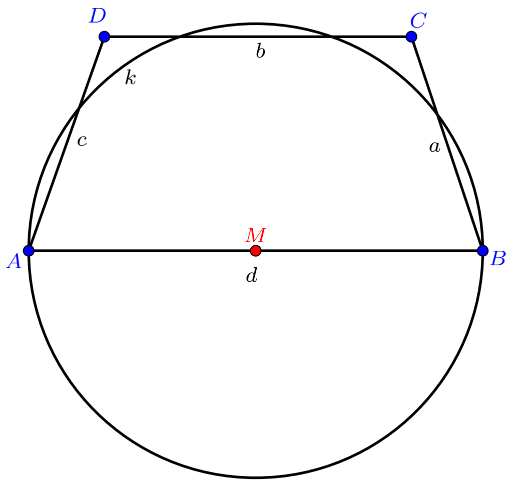
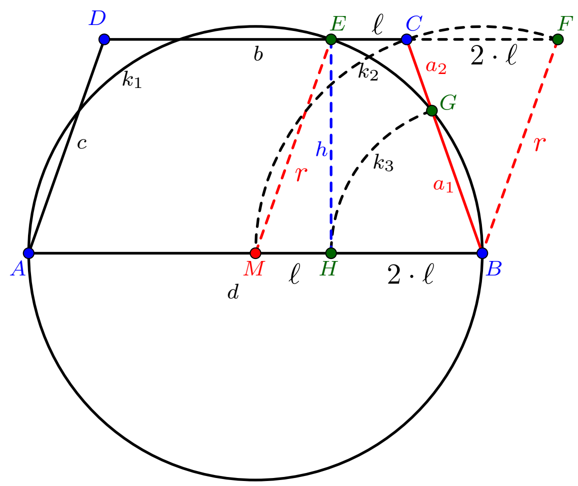
Halbkreis und Trapez

Die Längen der parallelen Seiten eines gleichschenkligen Trapezes stehen im Verhaltnis 3 : 2. Die größere dieser Seiten ist Durchmesser eines Kreises, der die andere parallele Seite in zwei Punkten schneidet. Die Teile dieser Seite, die außerhalb des Kreises liegen, seien zusammen genauso lang, wie der innerhalb des Kreises liegende Teil.
In welchem Verhältnis teilt der Kreis die Schenkel des Trapezes?



Aufgabe von Dr. R.Mavrova und P.Kirova, Plovdiv, Bulgarien, in der Zeitschrift „Die Wurzel“, Heft 12/2002

Lösung



Das Trapez $\square ABCD$ wird zu einem Parallelogramm $\square ABFD$ erweitert.

Es ist $\overline{AB} = 6 \cdot \ell$ und $\overline{CD} = 4 \cdot \ell$. Damit ist der Radius $r = 3 \cdot \ell$ ...(1).

Im Dreieck ΔMHE ist $h^2 + \ell^2 = r^2$, mit (1) $h^2 = 9 \cdot \ell^2 - \ell^2$, $h = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \ell$ ...(2).

Im Dreieck ΔBFC ist $a^2 = \ell^2 + h^2$, mit (2) $a^2 = \ell^2 + 8 \cdot \ell^2$, $a = 3 \cdot \ell$ ...(3).

Damit ist $a = r$ ...(4).

Legt man den Punkt M in den Koordinatenursprung und betrachtet das rechtwinklige Dreieck ΔABG, so ist $cos\,(\beta) = \frac{a_1}{2 \cdot r}$ und $cos\,(\beta) = \frac{r - x_G}{a_1}$,

so dass $\frac{a_1}{2 \cdot r} = \frac{r - x_G}{a_1}$, $x_G = r - \frac{a_1^2}{2 \cdot r}$ ...(5).

Im Dreieck ΔHBC ist $\frac{y_G}{r - x_G} = \frac{h}{\ell}$, mit (5),(2) $y_G = \sqrt{2} \cdot \frac{a_1^2}{r}$ ...(6).

Nach dem Satz von Pythagoras ist $(r - x_G)^2 + y_G^2 = a_1^2$.

Dieser Term entspricht einem Kreis k_3 mit dem Mittelpunkt B und dem Radius a_1.

Der Punkt G liegt auf k_3, so dass $\left(r - \left(r - \frac{a_1^2}{2 \cdot r}\right)\right)^2 + \left(\sqrt{2} \cdot \frac{a_1^2}{r}\right)^2 = a_1^2,$

$\frac{a_1^4}{4 \cdot r^2} + 2 \cdot \frac{a_1^4}{r^2} = a_1^2, \qquad a_1^2 \cdot \frac{9}{4 \cdot r^2} = 1,$

$a_1 = \frac{2}{3} \cdot r, \qquad \underline{\underline{a_1 = 2 \cdot \ell}}.$

Dann ist $\underline{\underline{a_2 = \ell}}.$

Der Kreis teilt die Schenkel des Trapezes im Verhältnis $\frac{a_1}{a_2} = 2 : 1$.