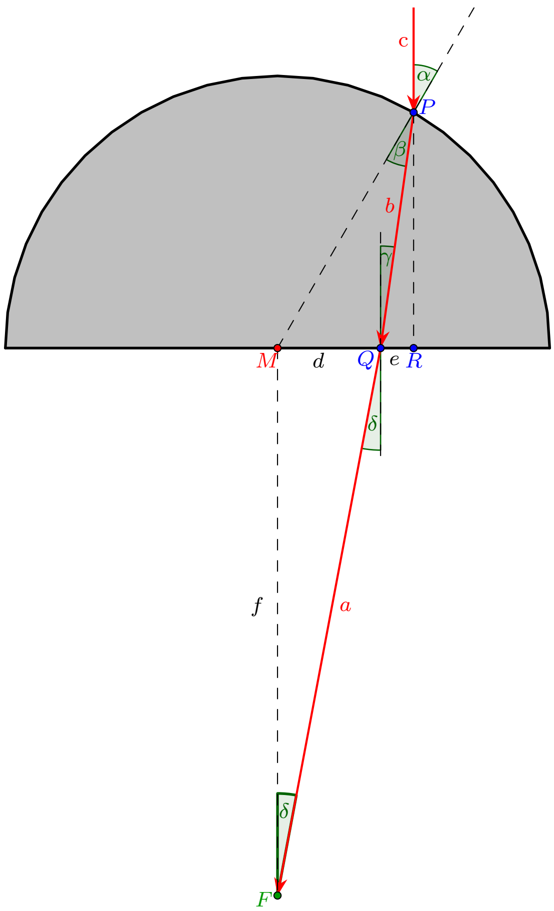
# Strahlengang an einer Halbkugelwasserlinse

Ein als Halbkugel idealisierter Wassertropfen mit einem Radius von $r = 4\ mm$ liegt auf einer sehr dünnen Glasplatte. Lichtstrahlen treffen vertikal auf den Wassertropfen.

a) Wie groß ist der Abstand $f$ des Brennpunktes vom Wassertropfen, wenn der Einfallswinkel des Lichtstrahls $\alpha = 30°$ beträgt?

b) Treffen alle vertikal auf die Wasserlinse einfallenden Strahlen im Punkt $F$ auf?




Idee nach einer Aufgabe aus dem Buch „Düsentrieb contra Einstein - Wasserlinsen“ von Heinrich Hemme, Januar 2022

**Lösung**

a) Der Mittelpunkt $M$ des Halbkreises $k$ wird in den Koordinatenursprung gelegt.
Es sind zwei Voraussetzungen notwendig für die Lösung der Aufgabe, das

| | | | |
|---|---|---|---|
| Snelliussche Brechungsgesetz | $\frac{\sin\ \alpha}{\sin\ \beta} = n$ | $\frac{\sin\ \delta}{\sin\ \gamma} = n$ | ...(1), |
| die Brechzahl Luft→Wasser | $n = \frac{4}{3}$ | | ...(2). |
| Es ist | $\tan\ \alpha = \frac{x_P}{y_P}$, | $y_P = \frac{x_P}{\tan\ \alpha}$ | ...(3), |
| | $\sin\ \alpha = \frac{x_P}{r}$ | $x_P = r \cdot \sin\ \alpha$ | ...(4). |
| Im Dreieck $\Delta QRP$ ist | $\tan\ \gamma = \frac{e}{y_P}$, | $e = y_P \cdot \tan\ \gamma$, | |
| mit (3), (4) | $e = \frac{r \cdot \sin\ \alpha}{\tan\ \alpha} \cdot \tan\ \gamma$, | $e = r \cdot \cos\ \alpha \cdot \tan\ \gamma$ | ...(5). |
| Es ist $d = x_P - e$, mit (4), (5) | $d = r \cdot \sin\ \alpha - r \cdot \cos\ \alpha \cdot \tan\ \gamma$, | | |
| | $d = r \cdot (\sin\ \alpha - \cos\ \alpha \cdot \tan\ \gamma)$, | | |
| $\gamma = \alpha - \beta$ | $d = r \cdot \left(\sin\ \alpha - \cos\ \alpha \cdot \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}\right)$, | | |
| | $d = r \cdot \frac{\sin\ \alpha \cdot \cos(\alpha-\beta) - \cos\ \alpha \cdot \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$, | | |
| $\cos(\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$ auflösen | $d = r \cdot \frac{\sin\ \alpha \cdot (\cos\ \alpha \cdot \cos\ \beta + \sin\ \alpha \cdot \sin\ \beta) - \cos\ \alpha \cdot (\sin\ \alpha \cdot \cos\ \beta - \sin\ \beta \cdot \cos\ \alpha)}{\cos(\alpha-\beta)}$, | | |

$$d = r\cdot\frac{sin\ \alpha\cdot cos\ \alpha\cdot cos\ \beta + sin^2\alpha\cdot sin\ \beta - cos\ \alpha\cdot sin\ \alpha\cdot cos\ \beta + sin\ \beta\cdot cos^2\alpha}{cos(\alpha-\beta)},$$

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ $\qquad d = r\cdot\frac{sin^2\alpha\cdot sin\ \beta + sin\ \beta\cdot cos^2\alpha}{cos(\alpha-\beta)},\quad d = r\cdot\frac{sin\ \beta}{cos\ \gamma}$ ...(7).

Im Dreieck $\Delta FQM$ ist $\qquad sin\ \delta = \frac{d}{a}$ ...(8),

mit (8) und (1) $\qquad d = a\cdot n\cdot sin\ \gamma,\quad a = \frac{d}{n\cdot sin\ \gamma}$ ...(9),

und im gleichen Dreieck $\qquad a = \sqrt{d^2+f^2}$ ...(10),

(9)=(10) $\qquad \frac{d}{n\cdot sin\ \gamma} = \sqrt{d^2+f^2},\quad f^2 = d^2\cdot\left(\frac{1}{n^2\cdot sin^2\gamma}-1\right),$

$$f = \frac{d}{n\cdot sin\ \gamma}\cdot\sqrt{1-n^2\cdot sin^2\gamma} \quad ...(11),$$

(7) in (11), $sin\ \beta = \frac{sin\ \alpha}{n}$ $\qquad f = \frac{r\cdot sin\ \alpha}{n^2\cdot sin\ \gamma\cdot cos\ \gamma}\cdot\sqrt{1-n^2\cdot sin^2\gamma}$ ,

$\gamma = \alpha-\beta$ $\qquad f = \frac{r\cdot sin\ \alpha}{n^2\cdot sin(\alpha-\beta)\cdot cos(\alpha-\beta)}\cdot\sqrt{1-n^2\cdot sin^2(\alpha-\beta)},$

auflösen $\qquad f = \frac{r\cdot sin\ \alpha\cdot\sqrt{1-n^2\cdot(sin\ \alpha\cdot cos\ \beta - cos\ \alpha\cdot sin\ \beta)^2}}{n^2\cdot(sin\ \alpha\cdot cos\ \beta - cos\ \alpha\cdot sin\ \beta)\cdot(cos\ \alpha\cdot cos\ \beta + sin\ \alpha\cdot sin\ \beta)},$ ...(12).

Die Brennweite ist nur noch vom Einfallswinkel $\alpha$ und Brechungswinkel $\beta$ abhängig. Dabei sind

$$sin\ \alpha = \frac{1}{2},\qquad cos\ \alpha = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3},$$

$$sin\ \beta = \frac{sin\ \alpha}{\frac{4}{3}},\qquad sin\ \beta = \frac{3}{8},$$

$$cos\ \beta = cos(arcsin(\tfrac{3}{8})),\qquad cos\ \beta = \sqrt{1-\left(\tfrac{3}{8}\right)^2},\qquad cos\ \beta = \frac{\sqrt{55}}{8}.$$

Die Größen eingesetzt, ergibt
$$f = \frac{4\ mm\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{16}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{55}}{8}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3}{8}\right)^2}}{\frac{16}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{55}}{8}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{55}}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\right)},$$

$$f = \frac{2\ mm\cdot\sqrt{1-\frac{16}{9}\cdot\left(\frac{\sqrt{55}}{16}-\frac{3}{16}\cdot\sqrt{3}\right)^2}}{\frac{16}{9}\cdot\left(\frac{\sqrt{55}}{16}-\frac{3}{16}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{16}\cdot\sqrt{165}+\frac{3}{16}\right)},$$

$$f = \frac{2\ mm\cdot\sqrt{1-\frac{1}{144}\cdot\left(\sqrt{55}-3\cdot\sqrt{3}\right)^2}}{\frac{1}{144}\cdot\left(\sqrt{55}-3\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{165}+3\right)},\qquad f = \frac{288\ mm\cdot\sqrt{1-\frac{55-6\cdot\sqrt{165}+27}{144}}}{55\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{55}-9\cdot\sqrt{55}-9\cdot\sqrt{3}},$$

$$f = \frac{288\ mm\cdot\sqrt{1-\frac{82-6\cdot\sqrt{165}}{144}}}{2\cdot\left(23\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{55}\right)},\qquad f = \frac{12\ mm\cdot\sqrt{62+6\cdot\sqrt{165}}}{23\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{55}},$$

$$\underline{\underline{f = 8{,}0458\ mm.}}$$

Bei einem Einfallswinkel von $\alpha = 30°$ beträgt die Brennweite der Wasserlinse $f = 8{,}05\ mm$.

b) Die Antwort ist nein. Die Abbildung veranschaulicht die unterschiedlichen Brennweiten von Strahlen, die in der Nähe des mittleren Bereiches vertikal auf die Wasserlinse treffen. Eine Faustformel ist $f = \frac{r}{n\cdot(n-1)}$, mit den gegebenen Werten $f = \frac{4\ mm}{\frac{4}{3}\cdot(\frac{4}{3}-1)}$, $f = 9\ mm$. Der Brennweitendurchschnitt der sechs Strahlen beträgt $\overline{f} = 8{,}45\ mm$.