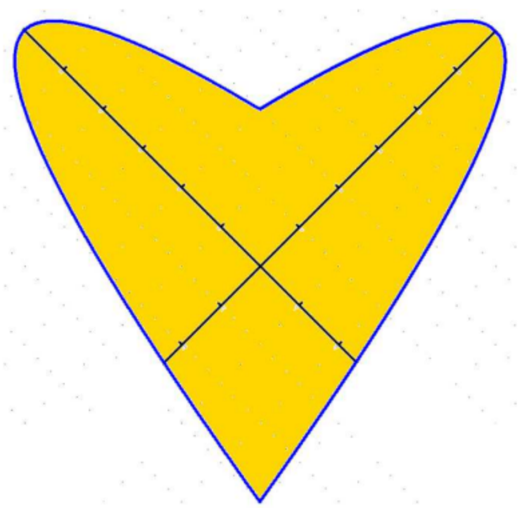
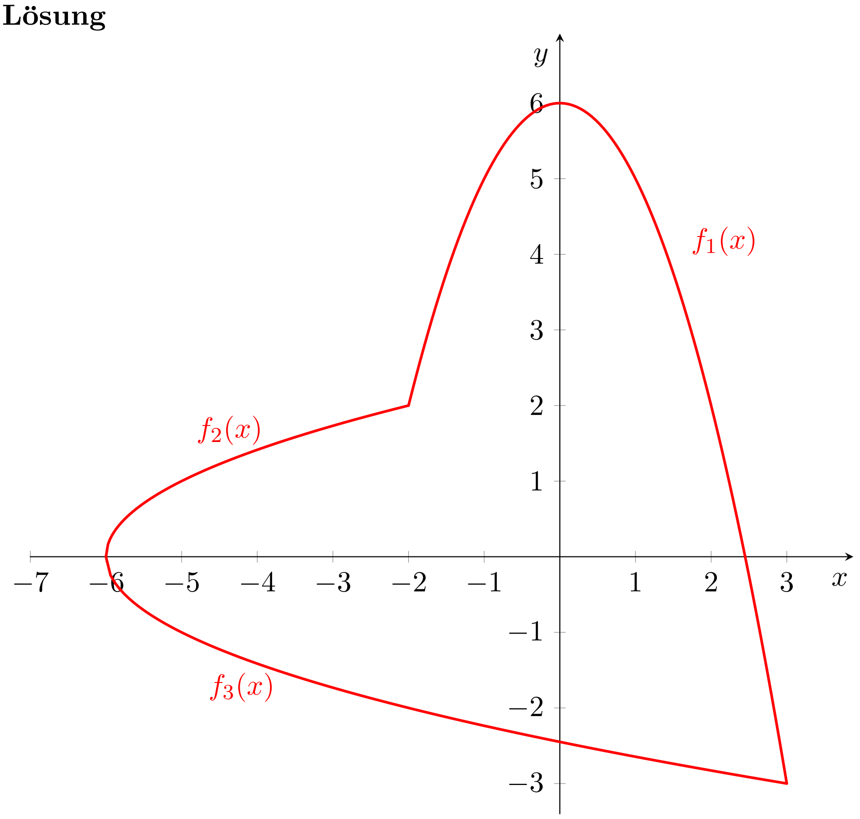
Herzkurve

Die folgende Figur ist durch den Schnitt zweier Normalparabeln entstanden. Die zugehörigen Funktionsgleichungen lassen sich mithilfe der eingezeichneten Koordinatenachsen erschließen. Welche Funktionsgleichungen liegen den Kurvenstücken zugrunde und wie sind die jeweiligen Definitionsbereiche.



Aufgabe von Heinz Klaus Strick, www.mathematik-ist-schoen.de, Problem des Monats November 2019

Lösung



Wird das Bild gedreht, können drei Funktionsgleichungen bestimmt werden.

- $f_1(x) = -x^2 + 6$ für $-2 \leq x \leq 3$,
- $f_2(x) = \sqrt{x+6}$ für $-6 \leq x \leq -2$,
- $f_3(x) = -\sqrt{x+6}$ für $-6 \leq x \leq 3$.

Der Schnittpunkt von f_1 und f_2 ist $A\,(-2|2)$, der Schnittpunkt von f_1 und f_3 ist $B\,(3|-3)$.
Die Fläche des Herzens besteht dann aus den Integralen
$A = \int\limits_{-2}^{3} (f_1(x) - f_3(x)) \cdot dx + 2 \cdot \int\limits_{-6}^{-2} f_2(x) \cdot dx$,
$A = \left[-\frac{x^3}{3} + 6 \cdot x + \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{x+6}^3 \right) \right]_{-2}^{3} + 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{x+6}^3 \right) \right]_{-6}^{-2}$,
$A = -9 + 18 + 18 - \left(\frac{8}{3} - 12 + \frac{16}{3} \right) + 2 \cdot \left(\frac{16}{3} - 0 \right)$,
$A = 27 + 4 + \frac{32}{3}$,
$A = \frac{125}{3} FE$.
Das Herz hat einen Flächeninhalt von $A = \frac{125}{3} FE$.