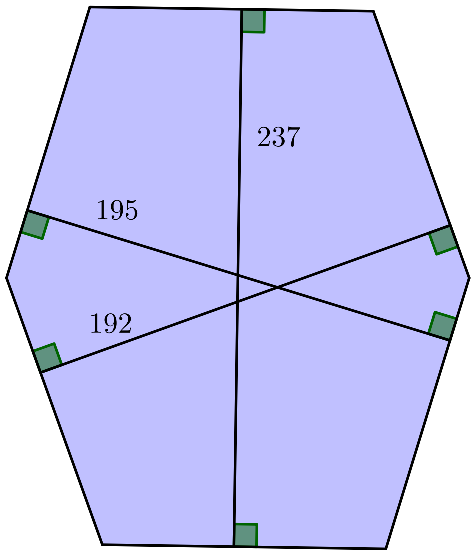
Flächeninhalt eines Hexagons

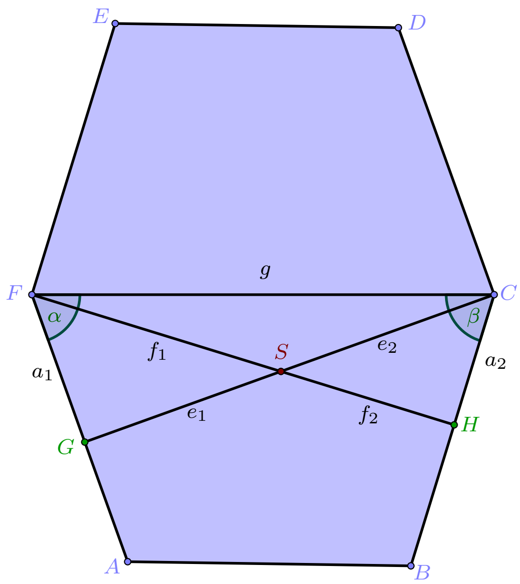
In einem Hexagon sind drei Längenangaben gegeben. Jeweils zwei gegenüberliegende Seiten verlaufen parallel zueinander und alle Seiten sind gleich lang.
Welchen Flächeninhalt besitzt das Hexagon?



Aufgabe von Presh Talwalkar, im MindYourDecisions-Kanal, veröffentlicht am 20. Oktober 2020

Lösung

a) Die Strecke g wird auf die x-Achse gelegt, der Punkt F befindet sich im Koordinatenursprung. Die Strecken $e = 192$ und $f = 195$ werden so verschoben, dass zwei ähnliche, rechtwinklige Dreiecke ΔGSF und ΔCSH entstehen, wobei $e = e_1 + e_2$ und $f = f_1 + f_2$. Es ergeben sich die die Winkel $\sphericalangle CFG = \alpha$ und $\sphericalangle HCF = \beta$.



Dann ist

$$\frac{e_1}{f_1} = \frac{f_2}{e_2}, \qquad \frac{e_1}{f_1} = \frac{195-f_1}{192-e_1},$$

$$192 \cdot e_1 - e_1^2 = 195 \cdot f_1 - f_1^2, \qquad f_1^2 - 195 \cdot f_1 + 192 \cdot e_1 - e_1^2 = 0,$$

$$f_{1_{1,2}} = \frac{195}{2} \pm \sqrt{\frac{195^2}{4} - 192 \cdot e_1 + e_1^2},$$

$$f_{1_{1,2}} = \frac{195}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{195^2 - 768 \cdot e_1 + 4 \cdot e_1^2} \qquad \text{...(1).}$$

Vermutung: Damit die Strecke f ganzzahlig wird, sollten auch die Strecken f_1 und e_1 ganzzahlig werden. Die Tabelle zeigt die ganzzahligen Lösungen von (1).

e_1	f_1	f_2	e_2	Bemerkung
66	63	132	126	entfällt, da $f_2 > e_1$
66	132	66	126	entfällt, da $f_2 = e_1$
92	80	115	100	entfällt, da $f_2 > e_1$
92	115	80	100	
100	80	115	92	entfällt, da $f_2 > e_1$
100	115	80	92	
126	63	132	66	entfällt, da $f_2 > e_1$
126	132	63	66	

Drei Lösungen bleiben übrig.

b) Die Strecken a_1, a_2 und g können bestimmt werden.

Im Dreieck ΔGCF ist $a_1^2 + e^2 = g^2$, ...(2),

im Dreieck ΔHCF ist $a_2^2 + f^2 = g^2$ ...(3),

(2)=(3) $a_1^2 + e^2 = a_2^2 + f^2$, $a_1^2 = f^2 - e^2 + a_2^2$ ...(4).

Aus der Ähnlichkeit, s.o., ist $\frac{a_1}{e_1} = \frac{a_2}{f_2}$, $a_2^2 = \left(\frac{f_2}{e_1}\right)^2 \cdot a_1^2$ ...(5),

(5) in (4) $a_1^2 = f^2 - e^2 + \left(\frac{f_2}{e_1}\right)^2 \cdot a_1^2$, $a_1 = \sqrt{\frac{f^2-e^2}{1-\left(\frac{f_2}{e_1}\right)^2}}$ ...(6),

(6) in (5) $a_2^2 = \left(\frac{f_2}{e_1}\right)^2 \cdot \frac{f^2-e^2}{1-\left(\frac{f_2}{e_1}\right)^2}$, $a_2 = \frac{f_2}{e_1} \cdot \sqrt{\frac{f^2-e^2}{1-\left(\frac{f_2}{e_1}\right)^2}}$ ...(7).

Weiterhin ist mit (6) $g^2 = a_1^2 + e^2$, $g^2 = \frac{f^2-e^2}{1-\left(\frac{f_2}{e_1}\right)^2} + e^2$ ...(8).

Werden die drei Lösungen von a) in (6) und (7) eingesetzt, entstehen nur im Fall von $e_1 = 92$ und $f_2 = 80$ ganzzahlige Werte von a_1 und a_2, sie sind $a_1 = 69$ und $a_2 = 60$. Die Strecke g hat dann eine Länge von $g = \sqrt{\frac{195^2-192^2}{1-\left(\frac{80}{92}\right)^2} + 192^2}$, $g = \sqrt{\frac{1161}{1-\left(\frac{20}{23}\right)^2} + 36864}$,

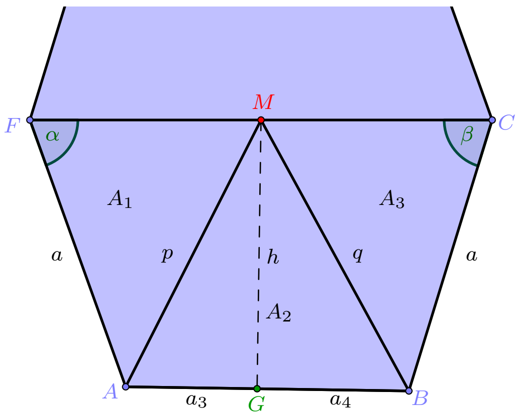
$g = \sqrt{\frac{529}{129} \cdot 1161 + 36864}$, $g = \sqrt{529 \cdot 9 + 36864}$,

$g = \sqrt{41625}$, $g = 15 \cdot \sqrt{185}$ ...(9).

Für weitere Betrachtungen werden die Gleichungen (10) und (11) benötigt

$cos\ \alpha = \frac{a_1}{g}$ (10), $cos\ \beta = \frac{a_2}{g}$ ...(11).

c) Die Seitenlänge $a = a_3 + a_4$ des Hexagons kann ermittelt werden.



Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Seite $g = \overline{CF}$, h hat den Wert $h = \frac{237}{2}$ und $h \perp \overline{AB}$.

Im Dreieck ΔAMF ist $p^2 = a^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 - a \cdot g \cdot cos\ \alpha$,

mit (10) $p^2 = a^2 + \frac{g^2}{4} - a \cdot a_1$ ...(12),

im Dreieck ΔBCM ist $q^2 = a^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 - a \cdot g \cdot cos\ \beta$,

mit (11) $q^2 = a^2 + \frac{g^2}{4} - a \cdot a_2$ ...(13).

Im Dreieck ΔAGM ist $\quad p^2 = a_3^2 + h^2 \qquad ...(14),$

im Dreieck ΔGBM ist $\quad q^2 = a_4^2 + h^2 \qquad ...(15),$

(14)=(12) $\quad a_3^2 + h^2 = a^2 + \frac{g^2}{4} - a \cdot a_1, \qquad a_3 = \sqrt{a^2 + \frac{g^2}{4} - a \cdot a_1 - h^2} \qquad ...(16),$

(15)=(13) $\quad a_4^2 + h^2 = a^2 + \frac{g^2}{4} - a \cdot a_2, \qquad a_4 = \sqrt{a^2 + \frac{g^2}{4} - a \cdot a_2 - h^2} \qquad ...(17),$

$a - a_3 = a_4$, mit (16), (17) $\quad a - \sqrt{a^2 + \frac{g^2}{4} - a \cdot a_1 - h^2} = \sqrt{a^2 + \frac{g^2}{4} - a \cdot a_2 - h^2},$

quadriert $\quad a^2 - 2 \cdot a \cdot \sqrt{a^2 + \frac{g^2}{4} - a \cdot a_1 - h^2} + a^2 + \frac{g^2}{4} - a \cdot a_1 - h^2 = a^2 + \frac{g^2}{4} - a \cdot a_2 - h^2$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot \sqrt{a^2 + \frac{g^2}{4} - a \cdot a_1 - h^2} - a \cdot a_1 = -a \cdot a_2,$$

$| : a \quad a - a_1 + a_2 = 2 \cdot \sqrt{a^2 + \frac{g^2}{4} - a \cdot a_1 - h^2},$

quadriert $\quad a^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2 \cdot a \cdot a_1 + 2 \cdot a \cdot a_2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 = 4 \cdot a^2 + g^2 - 4 \cdot a \cdot a_1 - 4 \cdot h^2,$

$$3 \cdot a^2 - 2 \cdot (a_1 + a_2) \cdot a + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 + g^2 - 4 \cdot h^2 - a_1^2 - a_2^2 = 0,$$

$| : 3 \quad a^2 - \frac{2}{3} \cdot (a_1 + a_2) \cdot a + \frac{1}{3} \cdot g^2 - \frac{4}{3} \cdot h^2 - \frac{(a_1 - a_2)^2}{3} = 0,$

negative Lösung entfällt $\quad a = \frac{1}{3} \cdot (a_1 + a_2) + \sqrt{\frac{(a_1 + a_2)^2}{9} - \frac{1}{3} \cdot g^2 + \frac{4}{3} \cdot h^2 + \frac{(a_1 - a_2)^2}{3}},$

$$a = \frac{1}{3} \cdot (a_1 + a_2) + \sqrt{\frac{4 \cdot a_1^2 - 4 \cdot a_1 \cdot a_2 + 4 \cdot a_2^2}{9} - \frac{1}{3} \cdot g^2 + \frac{4}{3} \cdot h^2},$$

$$a = \frac{1}{3} \cdot \left(a_1 + a_2 + \sqrt{4 \cdot (a_1^2 - a_1 \cdot a_2 + a_2^2) - 3 \cdot g^2 + 12 \cdot h^2}\right),$$

mit den Werten aus b) $\quad a = \frac{1}{3} \cdot \left(69 + 60 + \sqrt{4 \cdot (69^2 - 69 \cdot 60 + 60^2) - 3 \cdot 15^2 \cdot 185 + 12 \cdot \frac{237^2}{4}}\right),$

$$a = \frac{1}{3} \cdot \left(129 + \sqrt{4 \cdot 4221 - 124875 + 3 \cdot 237^2}\right),$$

$$a = \frac{1}{3} \cdot \left(129 + \sqrt{16884 - 124875 + 168507}\right),$$

$$a = \frac{1}{3} \cdot \left(129 + \sqrt{60516}\right), \qquad a = \frac{1}{3} \cdot (129 + 246),$$

$$a = \frac{1}{3} \cdot 375, \qquad \underline{\underline{a = 125}} \qquad ...(18).$$

Die Hexagonfigur hat eine Seitenlänge von beträgt $a = 125\ LE$.

d) Der Flächeninhalt des Hexagons besteht aus sechs Dreiecksflächen von denen je zwei gleich sind.

Dann ist $\quad A = 2 \cdot (A_1 + A_2 + A_3)$

$$A = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{g}{2} \cdot sin\ \alpha + \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{g}{2} \cdot sin\ \beta\right),$$

$$A = a \cdot \frac{g}{2} \cdot sin\ \alpha + a \cdot h + a \cdot \frac{g}{2} \cdot sin\ \beta,$$

$sin\ \alpha = \frac{e}{g}$, $sin\ \beta = \frac{f}{g} \quad A = a \cdot \left(\frac{g}{2} \cdot \frac{e}{g} + h + \frac{g}{2} \cdot \frac{f}{g}\right), \qquad A = a \cdot \left(\frac{e}{2} + h + \frac{f}{2}\right),$

$$A = 125 \cdot \left(\frac{192}{2} + \frac{237}{2} + \frac{195}{2}\right), \qquad A = 125 \cdot \frac{624}{2},$$

$$A = 125 \cdot 312, \qquad \underline{\underline{A = 39000\ FE}}.$$

Das Hexagon hat für den ganzzahlige Wert von a einen Flächeninhalt von $A = 39000\ FE$.
In den anderen beiden Fällen kann a mit $a = 115{,}09\ LE$ und $a = 99{,}89\ LE$ formell berechnet werden, so dass $e = 192$ und $f = 195$, führt dann aber zu einem Widerspruch mit $h = 237$. Nur mit $a = 125\ LE$ werden alle Bedingungen erfüllt.

Ein großes Dankeschön an Andreas Grieser, Greifswald, der mit einer Geogebra-Zeichnung wichtige Vorleistungen lieferte.