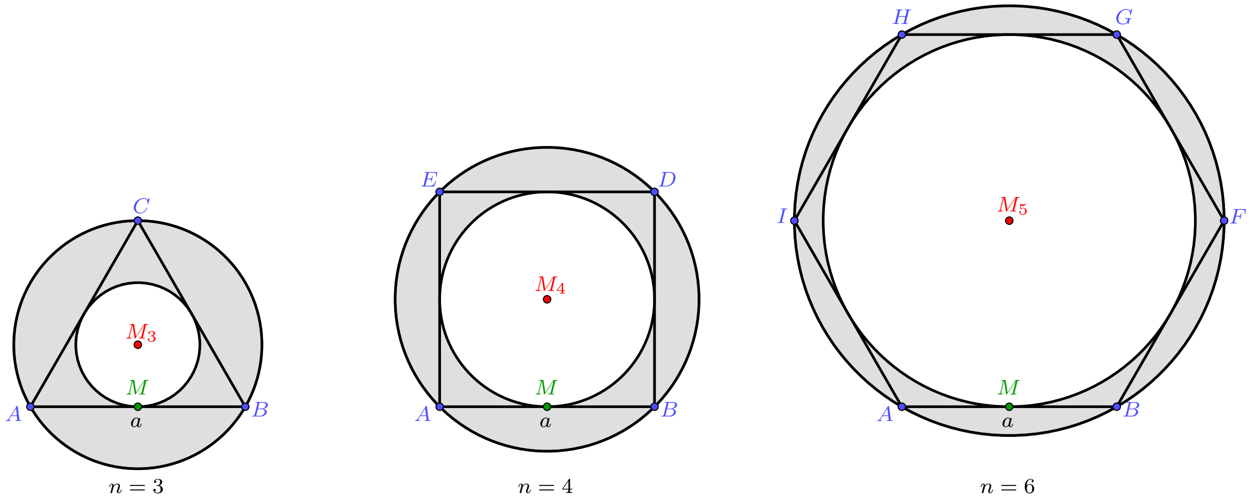
Kreisring und n-Ecke

Der Umkreis und Inkreis von regelmäßigen Vielecken ($n \geq 3$) mit der Seitenlänge a bilden einen Kreisring.
Wie verändert sich der Flächeninhalt des Kreisrings mit zunehmenden n?



Aufgabe der Woche von Thomas Jahre, Chemnitz, Serie 55 - Aufgabe 652 vom 16.10.2020

Lösung

Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Seite $a = \overline{AB}$. In allen Vielecken findet man ein rechtwinkliges Dreieck ΔAMM_n. Der Radius des Inkreises sei r_i, der Radius des Umkreises r_u.

Es ist im Dreieck ΔAMM_n $\quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r_i^2 = r_a^2, \quad \pi \cdot \frac{a^2}{4} = \pi \cdot \left(r_a^2 - r_i^2\right),$
$A_{Ring} = \pi \cdot \left(r_a^2 - r_i^2\right) \quad \underline{\underline{A_{Ring} = \pi \cdot \frac{a^2}{4}}}.$

Ein Kreisring bestehend aus In- und Umkreis hat bei allen regelmäßigen Vielecken den gleichen Flächeninhalt $A_{Ring} = \pi \cdot \frac{a^2}{4}$, er ist unabhängig von der Anzahl der Ecken.

Eine weitere Lösungsmöglichkeit bietet Dr. Eugen Willerding an. Er nutzt das Theorem von Holditch (1800-1867): *Läuft eine Sehne der Länge $p+q$ längs einer konvexen Kurve (hier Spezialfall Kreis) entlang, so erzeugt ein Punkt auf der Sehne im Abstand p und q von den jeweiligen Sehnenenden eine zweite Kurve (hier Spezialfall Kreis). Die eingeschlossene Fläche zwischen diesen Kurven (hier Kreise) beträgt immer $A = \pi \cdot p \cdot q$.*
Die Sehne ist in der vorliegenden Aufgabe die Seite a des n-Ecks, wobei $p = \frac{a}{2}$ und $q = \frac{a}{2}$, so dass $A_{Ring} = \pi \cdot \frac{a^2}{4}$. Schön, wenn man solche Sätze kennt!
Ingmar Rubin, Berlin, hat dazu interessante Betrachtungen durchgeführt, siehe hier.