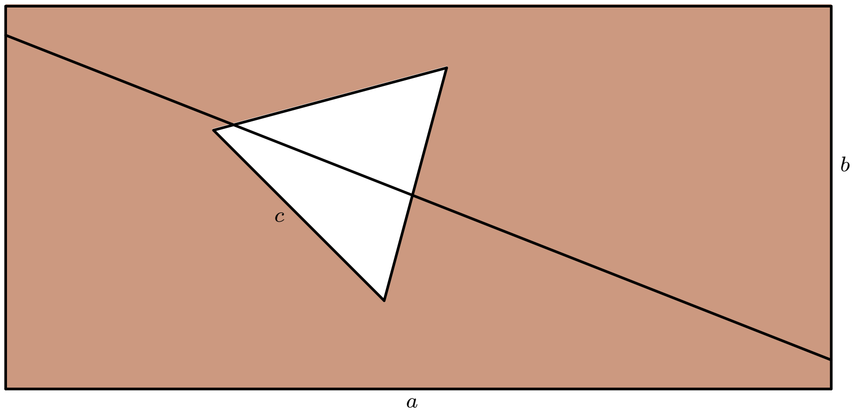
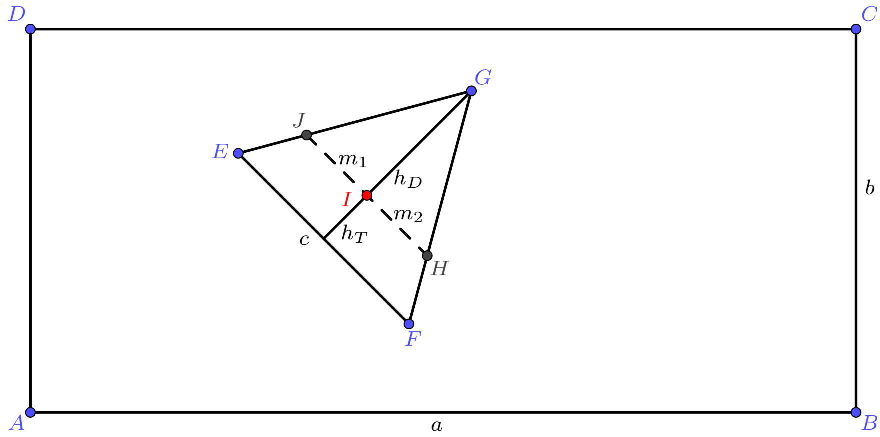
Kuchenteilung

Am Tag der Deutschen Einheit treffen sich Matthias und Steffen zum gemeinsamen Picknick am Grenzturm in Walbeck. Steffen bringt einen rechteckigen Schokoladenkuchen mit und Matthias einen selbstgebrannten Kräuterlikör. Nach der Würdigung dieses Tages mit dem Schnaps wird der Kuchen ausgepackt. Mit Erschrecken stellen sie fest, dass ein gleichseitiges Dreieck aus dem Kuchen herausgeschnitten wurde. Das Dreieck liegt vollständig innerhalb des Kuchens. Wahrscheinlich konnte Steffens Tochter der Versuchung nicht widerstehen, bevor sie den Kuchen einpackte.
Wie kann der Einheitsschokoladenkuchen mit einem einzigen geraden Schnitt durch das Dreieck geteilt werden, damit jeder den gleichen Anteil erhält?



Idee nach einer Aufgabe aus Monoid, Heft 140, Seite 13, „Das Denkerchen“ von Horst Sewerin vom Dezember 2019

Lösung, 1. Möglichkeit: Schnitt durch einen Punkt I auf der Linie $\overline{HJ}$



Der Punkt A liegt im Koordinatenursprung. Die Strecke $m = \overline{HJ}$ halbiert die Dreiecksfläche. Zuerst wird ein Zusammenhang zwischen m und der Seite c des Dreiecks gesucht. Danach kann die Höhe h_T des Trapezes $\square EFHJ$ bestimmt werden. Auf der der Strecke $\overline{HJ}$ befindet sich der Punkt I. Damit die Flächen des Trapezes und des Dreiecks ΔHGJ gleich groß sind, ist

$A_{\Delta EFG} = 2 \cdot A_{\Delta HGJ}$ $\quad \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot h_D$ $\quad c \cdot h = 2 \cdot m \cdot h_D$ ...(1).

Nach dem Strahlensatz ist $\quad \frac{h_D}{h} = \frac{\frac{m}{2}}{\frac{c}{2}}$, $\quad h_D = \frac{m \cdot h}{c}$ ...(2).

(2) in (1) $\quad c \cdot h = 2 \cdot m \cdot \frac{m \cdot h}{c}$ $\quad m = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot c$ ...(3).

Es ist $A_{\Delta EFHJ} = A_{\Delta HGJ}$ $\quad \frac{c+m}{2} \cdot h_T = \frac{m}{2} \cdot h_D$, $\quad c = m \cdot \left(\frac{h_D}{h_T} - 1 \right)$,

$h_D = h - h_T$ $\quad c = m \cdot \left(\frac{h - h_T}{h_T} - 1 \right)$, $\quad m = \frac{c}{\frac{h}{h_T} - 2}$ ...(4).

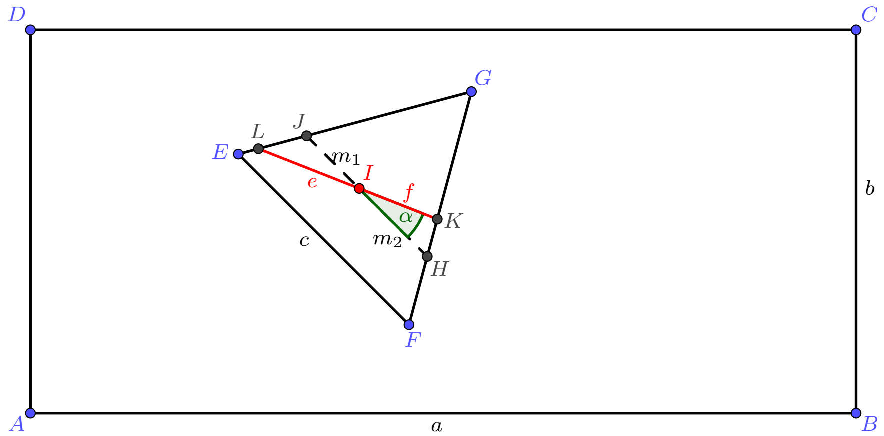
(3)=(4) $\quad \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot c = \frac{c}{\frac{h}{h_T}-2}, \qquad \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{h-2\cdot h_T}{h_T} = 1,$

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot h - \sqrt{2}\cdot h_T = h_T, \qquad h_T = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot h}{1+\sqrt{2}}$

$h_T = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot h}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}, \qquad h_T = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}-1}{-1}\cdot h,$

mit $h = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot c \quad h_T = \left(1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot c\cdot, \qquad \underline{\underline{h_T = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot c}}$.

Jetzt wird der Punkt I so auf m verschoben, dass bei der Drehung von m um I das Dreieck ebenfalls halbiert. Dabei entstehen die Punkte K und L, sowie die Strecken e und f. Bei jedem Drehwinkel $\alpha > 0°$ verschiebt sich der Punkt I, er liegt nicht mehr auf der Höhe h und unterhalb der Schwerpunktes des Dreiecks. Damit die Strecke $\overline{KL} = e + f$ die Fläche des gleichseitigen Dreiecks halbiert, müssen die Flächen der Dreiecke ΔIHK und ΔIJL gleich groß sein.



Im Dreieck ΔIJL ist $\quad \frac{sin(180°-120°-\alpha)}{sin\ 120°} = \frac{m_1}{e}, \qquad e = \frac{m_1\cdot sin\ 120°}{sin(60°-\alpha)}$ ...(5),

im Dreieck IHK $\quad \frac{sin(180°-60°-\alpha)}{sin\ 60°} = \frac{m_2}{f}, \qquad f = \frac{m_2\cdot sin\ 60°}{sin(120°-\alpha)}$ ...(6),

und mit $A_{\Delta IHK} = A_{\Delta IJL} \quad e\cdot m_1 = f\cdot m_2$ ...(7).

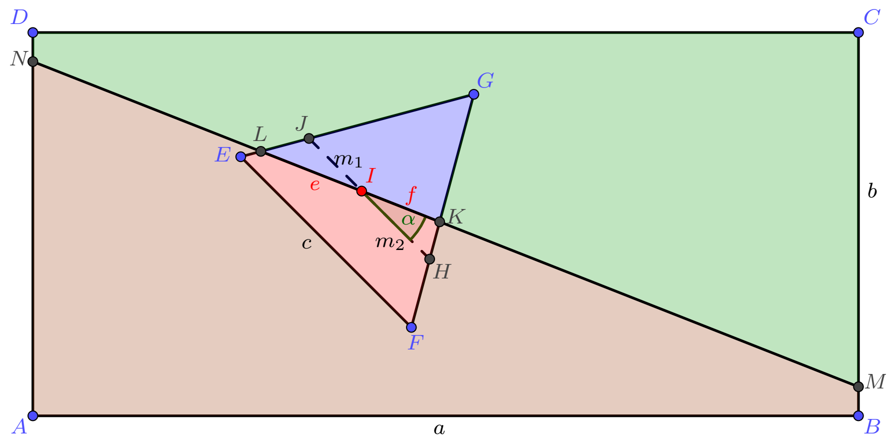
(5) und (6) in (7) $\quad \frac{m_1\cdot sin\ 120°}{sin(60°-\alpha)}\cdot m_1 = \frac{m_2\cdot sin\ 60°}{sin(120°-\alpha)}\cdot m_2,$

$sin\ 60° = sin\ 120° \quad \frac{m_1^2}{sin(60°-\alpha)} = \frac{m_2^2}{sin(120°-\alpha)}, \qquad m_1 = \sqrt{\frac{sin(60°-\alpha)}{sin(120°-\alpha)}}\cdot m_2$ ...(8).

Weiterhin ist mit (8) und (3) $\quad \sqrt{\frac{sin(60°-\alpha)}{sin(120°-\alpha)}}\cdot m_2 + m_2 = m, \qquad m_2 = \frac{m}{1+\sqrt{\frac{sin(60°-\alpha)}{sin(120°-\alpha)}}}$

Die Koordinaten von I sind $\quad \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OH} + \frac{\vec{m}}{m}\cdot m_2, \qquad \underline{\underline{\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OH} + \frac{\vec{m}}{1+\sqrt{\frac{sin(60°-\alpha)}{sin(120°-\alpha)}}}}}$

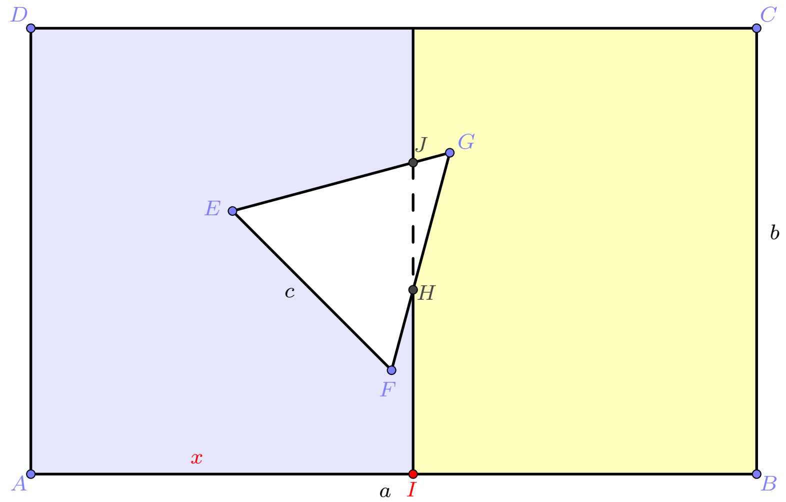
Das Kuchenmesser kann nun solange um den Punkt I gedreht werden, bis die Strecken $\overline{ND}$ und $\overline{BM}$ gleich lang sind.



Lösung, 2. Möglichkeit: Senkrechter Schnitt durch einen Punkt I

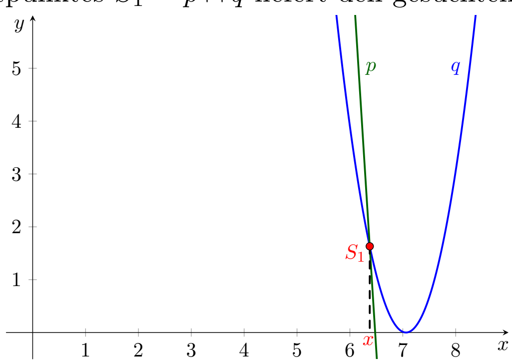
Andreas Grieser, Greifswald, löst die Aufgabe mit einem senkrechten Schnitt, parallel zu der Seite b des Rechtecks. Der Koordinatenursprung liegt wieder im Punkt A. Das Argument des Punktes I sei x. Eine Gerade g verlaufe durch die Punkte E und G mit der Steigung $m_1 = \frac{y_G - y_E}{x_G - x_E}$, eine weitere Gerade h wird durch die Punkte F und G mit der Steigung $m_2 = \frac{y_G - y_F}{x_G - x_F}$ bestimmt. Es sind vier Fälle zu unterscheiden. 1.Fall: Das Dreieck ΔHGJ liegt in der gelben Fläche.

1.Fall:

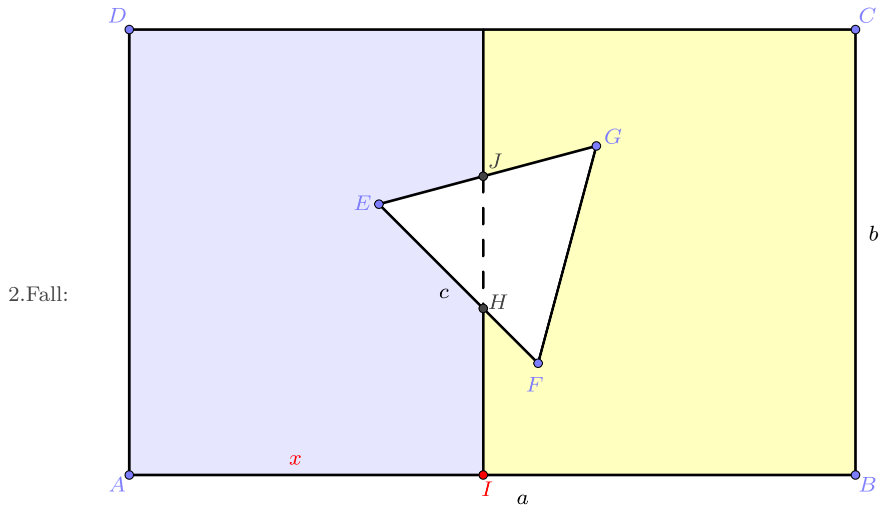


Gerade g durch G und E	g: $y - y_G = m_1 \cdot (x - x_G)$,	
$J \in g$	g: $y_J = y_G + m_1 \cdot (x - x_G)$	...(1)
Gerade h durch F und G	h: $y - y_G = m_2 \cdot (x - x_G)$,	
$H \in h$	h: $y_H = y_G + m_2 \cdot (x - x_G)$	...(2)
Fläche des Dreiecks ΔEFG	$A_{\Delta EFG} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sqrt{3}$, $\quad A_{\Delta EFG} = \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}$	...(3)
Fläche des Dreiecks ΔHGJ	$A_{HGJ} = \frac{1}{2} \cdot (y_J - y_H) \cdot (x_G - x)$	...(4)
gelbe Fläche mit (4)	$A_{gelb} = (a - x) \cdot b - \frac{1}{2} \cdot (y_J - y_H) \cdot (x_G - x)$	...(5)
blaue Fläche mit (3)	$A_{blau} = \frac{a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	...(6)
(5)=(6)	$(a - x) \cdot b - \frac{1}{2} \cdot (y_J - y_H) \cdot (x_G - x) = \frac{a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$,	
	$2 \cdot (a - x) \cdot b - (y_J - y_H) \cdot (x_G - x) = a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}$	
mit (1), (2)	$2 \cdot (a - x) \cdot b - (y_G + m_1 \cdot (x - x_G) - y_G - m_2 \cdot (x - x_G)) \cdot (x_G - x)$	
	$= a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}$,	
Klammern auflösen	$2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot b \cdot x - (y_G + m_1 \cdot x - m_1 \cdot x_G - y_G - m_2 \cdot x + m_2 \cdot x_G) \cdot$	
	$(x_G - x) = a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}$,	
zusammenfassen	$a \cdot b + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2 - 2 \cdot b \cdot x = ((m_1 - m_2) \cdot x + x_G \cdot (m_2 - m_1)) \cdot (x_G - x)$,	
	$a \cdot b + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2 - 2 \cdot b \cdot x = (m_2 - m_1) \cdot (x - x_G)^2$,	
lineare Funktion	$p(x) = a \cdot b + \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot b \cdot x$	
quadratische Funktion	$q(x) = (m_2 - m_1) \cdot (x - x_G)^2$	

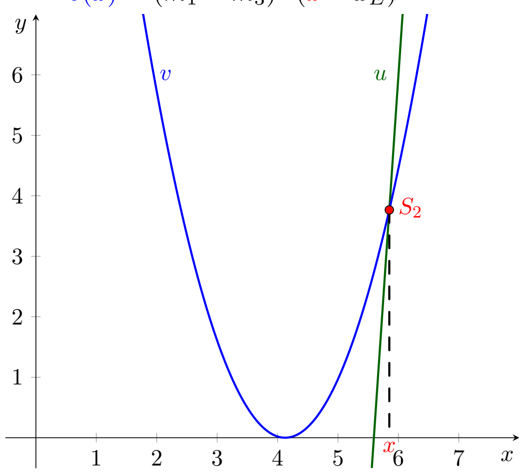
Das Argument des Schnittpunktes $S_1 = p \cap q$ liefert den gesuchten Wert x der Schnittgeraden.



2.Fall: Das Dreieck ΔHJE liegt in der blauen Fläche.



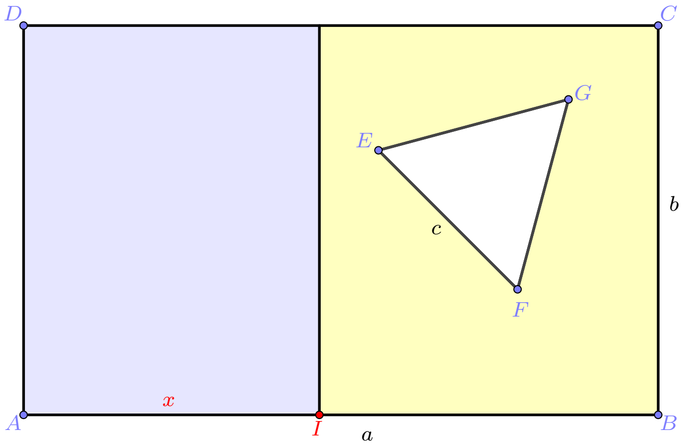
Gerade k durch E und F	k: $y - y_E = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} \cdot (x - x_E)$, $\quad y - y_E = m_3 \cdot (x - x_E)$	
$H \in k$	k: $y_H = y_E + m_3 \cdot (x - x_E)$	...(7)
Fläche des Dreiecks ΔHJE	$A_{HJE} = \frac{1}{2} \cdot (y_J - y_H) \cdot (x - x_E)$	...(8)
blaue Fläche mit (8)	$A_{blau} = x \cdot b - \frac{1}{2} \cdot (y_J - y_H) \cdot (x - x_E)$	...(9)
gelbe Fläche mit (3)	$A_{gelb} = \frac{a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	...(10)
(8)=(9)	$x \cdot b - \frac{1}{2} \cdot (y_J - y_H) \cdot (x - x_E) = \frac{a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$,	
	$2 \cdot x \cdot b - (y_J - y_H) \cdot (x - x_E) = a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}$,	
mit (1), (7)	$2 \cdot x \cdot b - (y_E + m_1 \cdot (x - x_E) - y_E - m_3 \cdot (x - x_E)) \cdot (x - x_E)$	
	$= a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}$,	
Klammern auflösen	$2 \cdot x \cdot b - (y_E - m_1 \cdot x_E - y_E + m_3 \cdot x_E + (m_1 - m_3) \cdot x) \cdot (x - x_E)$	
	$= a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}$,	
zusammenfassen	$2 \cdot x \cdot b - a \cdot b + \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3} = (m_1 - m_3) \cdot (x - x_E)^2$	
lineare Funktion	$u(x) = 2 \cdot x \cdot b - a \cdot b + \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}$	
quadratische Funktion	$v(x) = (m_1 - m_3) \cdot (x - x_E)^2$	



Das Argument des Schnittpunktes $S_2 = u \cap v$ liefert den gesuchten Wert x der Schnittgeraden.

3.Fall: Das gleichseitige Dreieck ΔEFG liegt vollständig in der in der gelben Fläche.

blaue Fläche	$A_{blau} = x \cdot b$		...(11)
(11)=(10)	$x \cdot b = \frac{a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	$\underline{\underline{x = \frac{1}{2} \cdot a - \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{8 \cdot b}}}$	



4.Fall: Das gleichseitige Dreieck ΔEFG liegt vollständig in der in der blauen Fläche.

blaue	$A_{blau} = x \cdot b - \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3}$		...(12)
gelbe Fläche	$A_{gelb} = (a - x) \cdot b$		...(13)
(12)=(13)	$x \cdot b - \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sqrt{3} = (a - x) \cdot b$	$\underline{\underline{x = \frac{1}{2} \cdot a + \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{8 \cdot b}}}$