Elastische Kollisionen zwischen 3 Kugeln

Eugen Willerding

November 2020

Im Folgenden soll ein spezielles Problem des zentralen Stoßes zwischen drei Kugeln erläutert werden. Zwei Kugeln der identischen Masse M bewegen sich aus dem Unendlichen aufeinander zu. Zwischen ihnen ruht eine kleinere Kugel der Masse m. Irgendwann wird die linke oder die rechte große Kugel auf die kleine Kugel treffen und es beginnt ein heftiges Kollisionswechselspiel zwischen diesen drei Kugeln. Nach endlicher Zeit werden die beiden großen Kugeln durch die Kollisionen der kleinen Kugel wieder auseinandergetrieben und alle werden wieder isoliert zurückbleiben (siehe Fig. (1))- Um dieses Wechselspiel im Geschwindigkeitsraum zu beschreiben, benötigt man die Formeln

Fig. 1: *Die Situation von zwei großen und einer kleinen Kugel, die für kurze Zeit durch elastische Kollisionen wechselwirken. Die großen Kugeln mit Masse M kommen aus dem Unendlichen und machen zentrale Stöße mit einer kleinen Kugel der Masse m. Diese verhindert, dass die beiden großen Kugeln kollidieren können. Sie verschwinden nach der Wechselwirkung wieder im Unendlichen.*

des elastischen Stoßes. Wir nehmen somit an, dass neben den Impulsen auch die kinetische Energie erhalten bleibt. Dann gelten zunächst allgemein für zwei Massen m_1 und m_2 die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,m_1\,v_1'^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,v_2'^2 &= \frac{1}{2}\,m_1\,v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,v_2^2 \\ m_1\,v_1' + m_2\,v_2' &= m_1\,v_1 + m_2\,v_2\end{aligned}$$

Hier bedeuten v_1, v_2 die Geschwindigkeiten der beiden Kugel m_1, m_2 vor dem Stoß, v_1', v_2' die entsprechenden Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stoß. Auflösen der Bedingungen nach v_1', v_2' ergibt neben der trivialen Lösung $v_1' = v_1$ und $v_2' = v_2$ (es kann kein Stoß stattfinden)

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\,v_1 + 2\,m_2\,v_2}{m_1 + m_2}; \qquad v_2' = \frac{2\,m_1\,v_1 + (m_2 - m_1)\,v_2}{m_1 + m_2}$$

Diese beiden Relationen wollen wir gleich als Matrixgleichung schreiben. Denn es gilt

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} & \frac{2\,m_2}{m_1 + m_2} \\ \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} & \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Die Matrix selbst bezeichnen wir jetzt als die entscheidende *Übergangsmatrix* für den elastischen Stoß von zwei Teilchen. Diese bestimmt den entscheidenden Übergang zwischen dem Zustand vor und nach dem Stoß. Ihre Determinante ist -1 und ihre Eigenwerte $(-1, 1)$.

Nun sind wir in der Lage, das Problem der drei speziellen Kugeln allgemein zu untersuchen. Die von links kommende Kugel hat den Index 1, die mittlere kleine Kugel den Index 2 und die von rechts kommende Kugel den Index 3. Die einfachste Anfangssituation kann die sein, dass die großen Kugeln mit der gleichen Geschwindigkeit aufeinander zueilen ($v_1 = -v_3$) und die mittlere entweder näher bei der rechten oder linken Kugel ruht. Beide Situationen sind aber letztendlich äquivalent. Findet also der *erste Stoß* zwischen den Kugeln 2 und 3 statt (Kugel 1 und Kugel 3 werden nie zusammenstoßen), so lautet die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-\mu}{1+\mu} & \frac{2}{1+\mu} \\ 0 & \frac{2\,\mu}{1+\mu} & \frac{1-\mu}{1+\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Zur Abkürzung wurde hier der Parameter

$$\mu = \frac{m}{M} \tag{3}$$

eingeführt. Man sieht anhand der Übergangsmatrix, dass die von links kommende Kugel mit Index 1 noch keine Wechselwirkung erlitten hat. Nach der ersten Kollision bewegt sich die mittlere Kugel mit Index 2 nach links und erleidet irgendwann eine Kollision mit der Kugel 1. Die Matrixgleichung dafür lautet dann

$$\begin{pmatrix} v_1'' \\ v_2'' \\ v_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\mu}{1+\mu} & \frac{2\,\mu}{1+\mu} & 0 \\ \frac{2}{1+\mu} & -\frac{1-\mu}{1+\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} \tag{4}$$

Man kann jetzt diese beiden Stöße mit einer einzigen Matrixgleichung beschreiben, indem die Matrix (2) von links mit der Matrix (4) multipliziert wird. Dann erhalten wir

$$\begin{pmatrix} v_1'' \\ v_2'' \\ v_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\mu}{1+\mu} & -\frac{2\,\mu\,(1-\mu)}{(1+\mu)^2} & \frac{4\,\mu}{(1+\mu)^2} \\ \frac{2}{1+\mu} & \frac{(1-\mu)^2}{(1+\mu)^2} & -\frac{2\,(1-\mu)}{(1+\mu)^2} \\ 0 & \frac{2\,\mu}{1+\mu} & \frac{1-\mu}{1+\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Nun sind wir in der Lage, den Geschwindigkeitszustand des Systems nach $2n$ Kollisionen zu berechnen. Denn es gilt mit einem Anfangszustand $\mathbf{v}_{(0)}$

$$\mathbf{v}_{(2n)} = \mathbf{U}^n\,\mathbf{v}_{(0)} \tag{6}$$

Es kommt jetzt also darauf an, über die Potenzen der quadratischen Übergangsmatrix

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1-\mu}{1+\mu} & -\frac{2\,\mu\,(1-\mu)}{(1+\mu)^2} & \frac{4\,\mu}{(1+\mu)^2} \\ \frac{2}{1+\mu} & \frac{(1-\mu)^2}{(1+\mu)^2} & -\frac{2\,(1-\mu)}{(1+\mu)^2} \\ 0 & \frac{2\,\mu}{1+\mu} & \frac{1-\mu}{1+\mu} \end{pmatrix} \tag{7}$$

genauere Aussagen zu machen. Dies gelingt sehr leicht durch ihre Eigenwerte und Eigenvektoren. Wir beschränken uns hier auf die Eigenwerte, die für das Verhalten des Systems fundamental sind. Bemerkenswert ist es, dass man die Eigenwerte von $\mathbf{M}$ in der Form

$$\lambda_1 \equiv q_1^2; \quad \lambda_2 \equiv q_2^2; \quad \lambda_3 \equiv q_3^2 \tag{8}$$

schreiben kann. Explizit gilt

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 \\ q_2 &= \frac{1 + \imath\sqrt{\mu(2+\mu)}}{1+\mu} \\ q_3 &= \frac{1 - \imath\sqrt{\mu(2+\mu)}}{1+\mu}. \end{aligned}$$

Man findet zudem $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$. Führt man den Hilfswinkel φ

$$\tan[\varphi] = \sqrt{\mu(2+\mu)} \tag{9}$$

ein, so können wir auch

$$q_1 = 1; \qquad q_2 = e^{+\imath\,\varphi}; \qquad q_3 = e^{-\imath\,\varphi} \tag{10}$$

schreiben. Die dynamische Entwicklung des Systems nach $N = 2\,n$ Kollisionen lässt sich nun wegen (6) mit den Eigenvektoren $\mathbf{e}_j$ der Übergangsmatrix $\mathbf{U}$ als

$$\mathbf{v}_{(2\,n)} = c_1\,\mathbf{e_1} + c_2\,\mathbf{e_2}\,e^{+2\,n\,\imath\,\varphi} + c_3\,\mathbf{e_3}\,e^{-2\,n\,\imath\,\varphi}. \tag{11}$$

schreiben. Die freien Konstanten c_k ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Bemerkenswert ist das Verhalten der beiden letzten komplexen Zeiger. Sie laufen gegenläufig auf dem komplexen Einheitskreis. Sie starten beide bei $n = 0$ und treffen sich auf der gegenüberliegenden Seite bei $2\,n\,\varphi = N\,\varphi = \pi$, woraus für die Gesamtzahl N der stattfinden Kollisionen die Abschätzung

$$N = \frac{\pi}{\varphi} \equiv \frac{\pi}{\arctan[\sqrt{\mu(2+\mu)}]} \tag{12}$$

folgt. Man kann zu diesem Problem noch vieles sagen. Zum Beispiel muss man die Übergangsmatrix $\mathbf{M}$ an ihrer Diagonalen spiegeln, wenn die mittlere Kugel 2 zuerst mit der von links kommenden Kugel 1 kollidiert. Die Eigenwerte bleiben aber gleich.