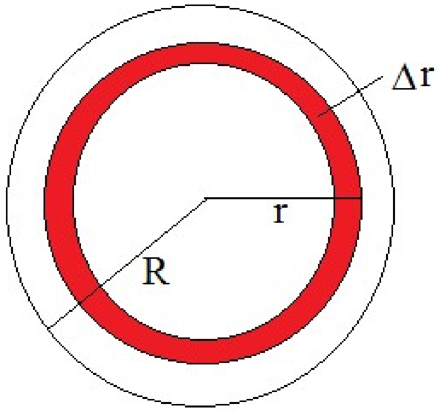
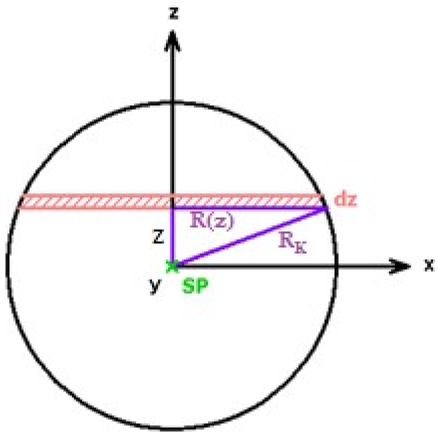


Man denkt sich die Kugel in dünne Scheiben zerlegt vor. Will man zunächst das Trägheitsmoment der dünnen Scheibe bestimmen, zerlegt man die Scheibe in in eine Anzahl konzentrischer Kreise mit der Breite Δr, die den Abstand r vom Mittelpunkt besitzen. Das Volumen eines Kreisringes berechnet sich aus
$\Delta V = \pi r^2 h - \pi(r - \Delta r)^2 h$,
$\Delta V = \pi r^2 h - \pi(r^2 - 2r\Delta r + \Delta r^2)h$,
$\Delta V = \pi h(r^2 - r^2 + 2r\Delta r - \Delta r^2)$,
$\Delta V = \pi h(2r\Delta r - \Delta r^2)$. Verkleinert man die Kreisringbreite Δr sehr stark, wird das Quadrat Δr^2 sehr klein gegenüber Δr, so dass der Ausdruck $\pi h \Delta r^2$ vernachlässigt werden kann. Dann ist $\Delta V = 2\pi h r \Delta r$. Die Masse des Kreisrings beträgt dann $\Delta m = 2\pi h r \Delta r \cdot \rho$. Damit ergibt sich ein Trägheitsmoment für den Kreisring von $\Delta J = \Delta m \cdot r^2$, $\Delta J = 2\pi h \rho r^3 \cdot \Delta r$. Wird Δr sehr klein und man summiert alle Kreisringe von 0 bis R auf, so ist das Trägheitsmoment eines Kreisringes $dJ = 2\pi h \rho r^3 \cdot dr$ und für alle Kreisringe $J = \int_0^R 2\pi h \rho r^3 \cdot dr$, $J = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 \cdot dr$, $J = 2\pi h \rho [\frac{r^4}{4}]_0^R$, $J = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4}$, $J = \frac{1}{2}\pi R^2 h \rho R^2$, $J = \frac{1}{2} V \rho R^2, J = \frac{1}{2} m R^2$.
Das Trägheitsmoment einer Scheibe beträgt somit $J_S = \frac{1}{2} m R^2$.



Will man das Trägheitsmoment einer Kugel mit dem Radius R_K bestimmen, teilt man die Kugel in viele kleine Scheiben ein, die die Höhe dz haben. Der Scheibenradius R(z) ist nun von der Höhe z abhängig.
Das Trägheitsmoment der Kugel besteht aus der Summe aller Trägheitsmomente der R(z) abhängigen Scheiben, für eine Scheibe also $dJ = \frac{1}{2} R(z)^2 \cdot dm$. Die Gleichung kann umgeformt werden zu
$dJ = \frac{1}{2}\rho \cdot R(z)^2 \cdot dV, dJ = \frac{1}{2}\rho \cdot R(z)^2 \cdot \pi \cdot R(z)^2 \cdot dz$,
$dJ = \frac{1}{2}\pi\rho \cdot R(z)^4 \cdot dz$. Nun ist $R(z) = \sqrt{R_K^2 - z^2}$, so dass $dJ = \frac{1}{2}\pi\rho(R_K^2 - z^2)^2 \cdot dz$,
$dJ = \frac{1}{2}\pi\rho(R_K^4 - 2R_K^2 z^2 + z^4) \cdot dz$. Das Trägheitsmoment der Kugel ist somit die Summe der Scheiben mit sehr kleiner Höhe dz, also $J = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-R_K}^{R_K} (R_K^4 - 2R_K^2 z^2 + z^4) \cdot dz$,
$J = \pi\rho \int_0^{R_K} (R_K^4 - 2R_K^2 z^2 + z^4) \cdot dz, J = \pi\rho[(R_K^4 z - \frac{2}{3}R_K^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5]_0^{R_K}$,
$J = \pi\rho(R_K^5 - \frac{2}{3}R_K^5 + \frac{1}{5}R_K^5), J = \pi\rho(\frac{15}{15}R_K^5 - \frac{10}{15}R_K^5 + \frac{3}{15}R_K^5), J = \pi\rho\frac{8}{15}R_K^5$,
$J = \frac{2}{5}R_K^2 \cdot \frac{4}{3}\pi R_K^3 \cdot \rho, J = \frac{2}{5}R_K^2 \cdot V\rho, J = \frac{2}{5}R_K^2 m, J = \frac{2}{5} m R_K^2$.
Das Trägheitsmoment einer Kugel beträgt $J_K = \frac{2}{5} m R_K^2$.