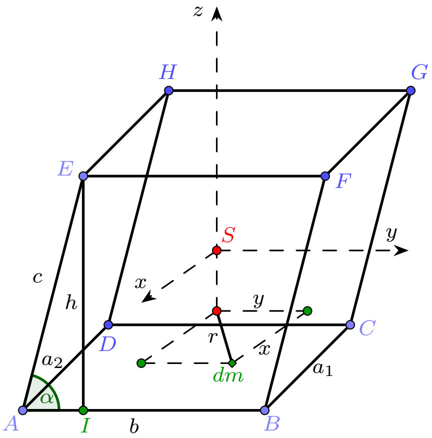
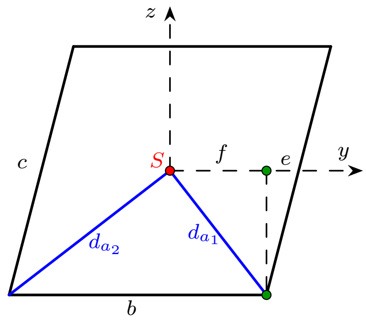
Das Massenträgheitsmoment eines schiefen Prismas bei der Drehung um eine seiner Kanten a, b oder c



Das Massenträgheitsmoment eines schiefen Prismas bei der Rotation um eine seiner Kanten soll bestimmt werden. Der Koordinatenursprung befindet sich im Schwerpunkt S des Prismas, seine Masse ist $m = \rho \cdot a \cdot b \cdot h$. Ein Masseteilchen dm hat den Abstand r von der Drehachse, der Trägheitstensor J im Hauptträgheitsachsensystem durch den Schwerpunkt ist bestimmt durch

$$J = \frac{m}{12} \cdot \begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+h^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2-h^2 \end{pmatrix}.$$



Ist bei einer Drehbewegung die Rotationsachse nicht mehr eine der Hauptträgheitsachsen, so ändert sich das Massenträgheitsmoment. Bei der Rotation des Prismas um die Seite $a_1 = \overline{BC}$ liegt diese Kante parallel zur x-Achse. Das Massenträgheitsmoment wird mit Hilfe des Steinerschen Satzes bei einem Abstand d zur x-Achse ermitteltt mit der Gleichung

$$J_a = J_x + m \cdot d_{a_1}^2 \qquad ...(1).$$

Dabei ist $\quad \frac{b}{2} = f + e \qquad f = \frac{b}{2} - e,$

$$e = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} \qquad d_{a_1}^2 = \left(\frac{b}{2} - e\right)^2 + \left(-\frac{h}{2}\right)^2, \qquad d_{a_1}^2 = \left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{h^2}{4}}\right)^2 + \frac{h^2}{4},$$

$$d_{a_1}^2 = \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} \cdot \sqrt{c^2-h^2} + \frac{c^2}{4} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{4}, \qquad d_{a_1}^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot \sqrt{c^2-h^2}\right) \qquad ...(2).$$

(2) in (1)

$$J_{a_1} = J_x + \frac{m}{4} \cdot \left(b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot \sqrt{c^2-h^2}\right),$$

$$J_{a_1} = \frac{m}{12} \cdot \left(b^2 + c^2\right) + \frac{m}{4} \cdot \left(b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot \sqrt{c^2-h^2}\right),$$

$$\underline{\underline{J_{a_1} = \frac{m}{3} \cdot \left(b^2 + c^2\right) - \frac{m}{2} \cdot b \cdot \sqrt{c^2-h^2}}} \qquad ...(3).$$

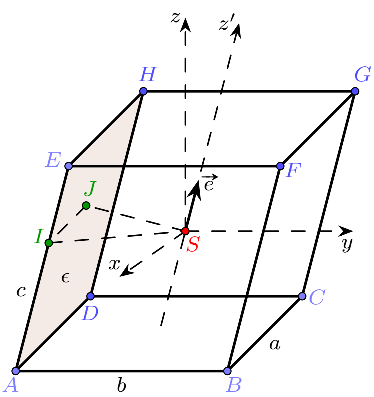
Bei der Drehung des Prismas um die Seite $a_2 = \overline{AD}$ wird das Massenträgheitsmoment größer, mit (3) ist $\quad \underline{\underline{J_{a_2} = \frac{m}{3} \cdot \left(b^2 + c^2\right) + \frac{m}{2} \cdot b \cdot \sqrt{c^2-h^2}}}.$

Rotiert das Prisma um die Seite b, die parallel zur y-Achse liegt, ist nach dem Satz von Steiner

$$J_b = J_y + m \cdot d_b^2,$$

$$d_b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 \qquad J_b = \frac{m}{12} \cdot \left(a^2 + h^2\right) + m \cdot \left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{4}\right), \qquad \underline{\underline{J_b = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + h^2\right)}}.$$

Die Berechnung des Massenträgheitsmomentes bei der Rotation um die Kante $c = \overline{AE}$ erfordert mehr Aufwand, da diese Kante zu keiner Hauptträgheitsachse parallel liegt.



Es muss zunächst der Abstand $d_\epsilon = \overline{SJ}$ vom Schwerpunkt $S\left(\frac{a}{2} \mid \frac{1}{2} \cdot \left(b + \sqrt{c^2-h^2}\right) \mid \frac{h}{2}\right)$ zur Ebene ϵ, die von den Punkten $A(0|0|0)$, $D(a|0|0)$ und $E(0|\sqrt{c^2-h^2}|h)$ gebildet wird, bestimmt werden. Zur Vereinfachung stellt man sich den Koordinatenursprung im Punkt A vor. Die Vektoren, die die Ebene ϵ aufspannen, sind $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{c^2-h^2} \\ h \end{pmatrix}$.

Das Kreuzprodukt $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AE} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{c^2-h^2} & h \end{vmatrix}$ liefert den Normalenvektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a\cdot h \\ a\cdot\sqrt{c^2-h^2} \end{pmatrix}$ von ϵ. Mit der Hesseschen Normalform $d = \frac{n_x\cdot x+n_y\cdot y+n_z\cdot z+e}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}}$ und $e=0$,

da $A \in \epsilon$, ist $\quad d_\epsilon = \frac{-a\cdot h\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(b+\sqrt{c^2-h^2}\right)+a\cdot\sqrt{c^2-h^2}\cdot\frac{h}{2}}{\sqrt{(-a\cdot h)^2+\left(a\cdot\sqrt{c^2-h^2}\right)^2}}$, $\quad d_\epsilon = \frac{-\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot h}{\sqrt{a^2\cdot h^2+a^2\cdot c^2-a^2\cdot h^2}}$,

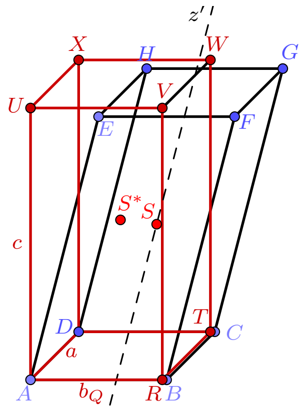
$|d_\epsilon| = \frac{b\cdot h}{2\cdot c}$, $\quad d_\epsilon^2 = \frac{b^2\cdot h^2}{4\cdot c^2}$.

Im ΔSJI ist $\quad d_\epsilon^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \overline{SI}^2$, $\quad \overline{SI}^2 = \frac{b^2\cdot h^2}{4\cdot c^2} + \frac{a^2}{4}$,

$\overline{SI}^2 = d_c^2 \quad d_c^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{b^2\cdot h^2}{c^2}+a^2\right)$ ...(4).

Damit ist das Abstandsquadrat des Punktes S zur Kante c bestimmt.

Nun muss das Trägheitsmoment $J_{z'}$ bezüglich der zu c parallelen Achse durch den Schwerpunkt S ermittelt werden. Diese Achse sei z'. Es hilft eine „Entscherung“ des schiefen Prismas zu einem Quader. Dieser Quader mit dem Schwerpunkt S^* hätte die Höhe c und die Tiefe a. Die Breite $b_Q = \overline{AR}$ ergibt sich aus der Massen- bzw. Volumengleichheit beider Körper



$V_{Prisma} = V_{Quader}$, $\quad a\cdot b\cdot h = a\cdot b_Q\cdot c$,

$b_Q = \frac{b\cdot h}{c}$, $\quad b_Q^2 = \frac{b^2\cdot h^2}{c^2}$ ...(5).

Das Massenträgheitsmoment eines Quaders bezüglich einer nun senkrecht zur Grundfläche gedachten z-Achse durch S^* ist bekannt mit $\quad J_z = \frac{m}{12}\cdot\left(a^2+b_Q^2\right)$. Da $J_z = J_{z'}$,

ist mit (4) $\quad J_c = J_{z'} + m\cdot d_c^2$, $\quad J_c = \frac{m}{12}\cdot\left(a^2+b_Q^2\right) + \frac{m}{4}\cdot\left(\frac{b^2\cdot h^2}{c^2}+a^2\right)$,

mit (5) $\quad J_c = \left(\frac{m}{12}+\frac{m}{4}\right)\cdot\left(a^2+\frac{b^2\cdot h^2}{c^2}\right)$, $\quad \underline{\underline{J_c = \frac{m}{3}\cdot\left(a^2+\frac{b^2\cdot h^2}{c^2}\right)}}$.

Zusammenfassung:

Ein gescherter Quader ist ein schiefes Prisma, Spat oder Parallelepiped. Bei der Rotation um verschiedene Achsen treten unterschiedliche Massenträgheitsmomente auf. Die Abmessungen sind a und b für die Grundfläche, c für die schräge Körperkante und h für die Höhe, die senkrecht auf der Grundfläche steht. Die nur von den Abmessungen abhängigen Formeln gelten für eine Scherung in y-Richtung, wobei $y \parallel b$.

bei Rotation um die	Massenträgheitsmoment J
x-Achse im Schwerpunkt	$J_x = \frac{m}{12}\cdot\left(b^2+c^2\right)$
y-Achse im Schwerpunkt	$J_y = \frac{m}{12}\cdot\left(a^2+h^2\right)$
z-Achse im Schwerpunkt	$J_z = \frac{m}{12}\cdot\left(a^2+b^2+c^2-h^2\right)$
Körperkante a_1	$J_{a_1} = \frac{m}{3}\cdot\left(b^2+c^2\right) - \frac{m}{2}\cdot b\cdot\sqrt{c^2-h^2}$
Körperkante a_2	$J_{a_2} = \frac{m}{3}\cdot\left(b^2+c^2\right) + \frac{m}{2}\cdot b\cdot\sqrt{c^2-h^2}$
Körperkante b	$J_b = \frac{m}{3}\cdot\left(a^2+h^2\right)$
Körperkante c	$J_c = \frac{m}{3}\cdot\left(a^2+\frac{b^2\cdot h^2}{c^2}\right)$