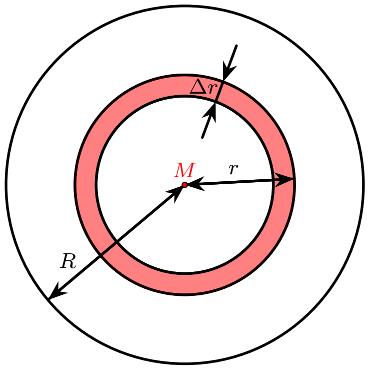
Das Massenträgheitsmoment einer Kugel

Das Massenträgheitsmoment einer Kugel soll bestimmt werden. Man denkt sich die Kugel in dünne Scheiben geschnitten. Will man zunächst das Massenträgheitsmoment einer Scheibe bestimmen, zerlegt man sie in eine Anzahl konzentrischer Kreise mit der Breite Δr und der Höhe h, die den Abstand r vom Mittelpunkt besitzen. Das Volumen ΔV eines Kreisringes wird berechnet mit der Gleichung

$\Delta V = \pi \cdot r^2 \cdot h - \pi \cdot (r - \Delta r)^2 \cdot h,$

$\Delta V = \pi \cdot h \cdot (r^2 - r^2 + 2 \cdot r \cdot \Delta r - \Delta r^2),$

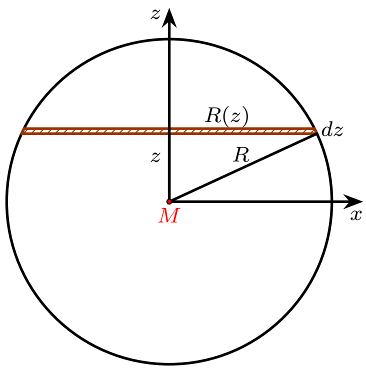
$\Delta V = \pi \cdot h \cdot (2 \cdot r \cdot \Delta r - \Delta r^2).$



Verkleinert man die Kreisringbreite Δr sehr stark, wird das Quadrat Δr^2 sehr klein gegenüber $2 \cdot r \cdot \Delta r$, so dass der Ausdruck $\pi \cdot h \cdot \Delta r^2$ vernachlässigt werden kann.

Dann ist das Volumen des Kreisrings	$\Delta V = 2 \cdot \pi \cdot \Delta r \cdot r \cdot h,$
seine Masse mit der Dichte ρ	$m = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \Delta r \cdot r \cdot h,$
und sein Trägheitsmoment mit $\Delta J = m \cdot r^2$	$\Delta J = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \Delta r \cdot r^3 \cdot h.$
Strebt $\Delta r \to 0$, ist das Trägheitsmoment	$dJ = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot r^3 \cdot h \cdot dr.$
Für alle Kreisringe von 0 bis R gilt	$J_S = \int\limits_0^R 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot r^3 \cdot h \cdot dr,$
Stammfunktion bilden	$J_S = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot h \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R,$
Grenzen einsetzen	$J_S = \pi \cdot \rho \cdot h \cdot \frac{R^4}{2}.$
Eine Kreisscheibe hat die Masse	$m_S = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$ ...(1),
so dass das Trägheitsmoment der Scheibe	$J_S = \frac{1}{2} \cdot m_S \cdot R^2.$

Will man das Trägheitsmoment J_K der Kugel mit dem Radius R bestimmen, teilt man die Kugel in viele kleine Scheiben ein, die die Höhe dz haben. Der Scheibenradius $R(z)$ ist nun von der Höhe z abhängig. Eine dünne Scheibe hat das Massenträgheitsmoment $dJ_S = \frac{1}{2} \cdot R(z)^2 \cdot dm$.



Für alle $R(z)$-abhängigen Scheiben gilt	$J_K = \int\limits_{-R}^{R} \frac{1}{2} \cdot R(z)^2 \cdot dm,$
$dm = \rho \cdot dV$, $dV = \pi \cdot R(z)^2 \cdot dz$	$J_K = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{-R}^{R} R(z)^2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot R(z)^2 \cdot dz,$
mit dem Satz von Pythagoras $R(z)^2 = R^2 - z^2$	$J_K = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2 \cdot dz,$
	$J_K = \frac{\pi}{2} \cdot \rho \int\limits_{-R}^{R} \left(R^4 - 2 \cdot R^2 \cdot z^2 + z^4\right) \cdot dz,$
Stammfunktion bilden	$J_K = \frac{\pi}{2} \cdot \rho \cdot \left[R^4 \cdot z - \frac{2}{3} \cdot R^2 \cdot z^3 + \frac{1}{5} \cdot z^5\right]_{-R}^{R},$
Grenzen einsetzen	$J_K = \pi \cdot \rho \cdot \left(R^5 - \frac{2}{3} \cdot R^5 + \frac{1}{5} \cdot R^5\right),$
	$J_K = \pi \cdot \rho \cdot \frac{8}{15} \cdot R^5,$
mit der Masse einer Kugel $m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$	$J_K = \frac{2}{5} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3,$ $\underline{\underline{J_K = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2}}.$