Das Massenträgheitsmoment eines Quaders

Das Massenträgheitsmoment eines Quaders soll bezüglich der z-Achse bestimmt werden. Der Koordinatenursprung befindet sich im Schwerpunkt des Quaders. Ein Masseteilchen dm hat den Abstand r von der z-Achse. Das Trägheitsmoment des Masseteilchens kann bestimmt werden mit der Gleichung

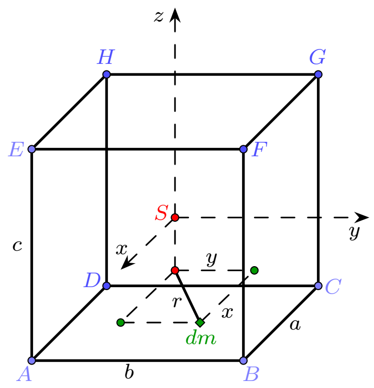
$$dJ = r^2 \cdot dm.$$

Weiterhin ist $r^2 = x^2 + y^2$ und $dm = \rho \cdot dV$, so dass

$$dJ = (x^2 + y^2) \cdot \rho \cdot dV.$$

Um alle Masseteilchen des Quaders zu erfassen, müssen die einzelnen Massenträgheitsmomente aufsummiert werden.

Dabei hilft das Integral $\quad J_z = \rho \cdot \int\limits_V (x^2 + y^2) \cdot dV.$



Die Integration kann nacheinander in jede Achsrichtung erfolgen. Die Integrationsgrenzen werden dabei so gewählt, dass über das gesamte Volumen des Quaders integriert wird, also

nach z integriert $\quad J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[(x^2 + y^2) \cdot z\right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \cdot dx \cdot dy,$

$$J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) \cdot c \cdot dx \cdot dy, \quad J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 \cdot c + y^2 \cdot c) \cdot dx \cdot dy,$$

nach y integriert $\quad J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[x^2 \cdot c \cdot y + \frac{y^3}{3} \cdot c\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cdot dx, \quad J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 2 \cdot \left(x^2 \cdot c \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^3}{24} \cdot c\right) \cdot dx,$

$$J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(x^2 \cdot b \cdot c + \frac{b^3}{12} \cdot c\right) \cdot dx,$$

nach x integriert $\quad J_z = \rho \cdot \left[\frac{x^3}{3} \cdot b \cdot c + \frac{b^3}{12} \cdot c \cdot x\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}, \quad J_z = \rho \cdot 2 \cdot \left(\frac{a^3}{24} \cdot b \cdot c + \frac{b^3}{12} \cdot c \cdot \frac{a}{2}\right),$

$$J_z = \rho \cdot \left(\frac{a^3}{12} \cdot b \cdot c + \frac{b^3}{12} \cdot c \cdot a\right), \quad J_z = \rho \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right),$$

mit $m = \rho \cdot a \cdot b \cdot c \quad \underline{\underline{J_z = \frac{m}{12} \cdot \left(a^2 + b^2\right)}}.$

Ein Quaders mit einer Tiefe a, einer Breite b und einer Höhe c hat bezüglich der z-Achse, die durch den Schwerpunkt des Quaders verläuft, das Massenträgheitsmoment $J_z = \frac{m}{12} \cdot \left(a^2 + b^2\right)$.
Analog ist das Massenträgheitsmoment bezüglich der y-Achse durch den Schwerpunkt $J_y = \frac{m}{12} \cdot \left(a^2 + c^2\right)$ und bezüglich der x-Achse durch den Schwerpunkt $J_x = \frac{m}{12} \cdot \left(b^2 + c^2\right)$.
Der Trägheitstensor J im Hauptachsensystem durch den Schwerpunkt eines Quaders ist

bestimmt durch $\quad J = \frac{m}{12} \cdot \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$