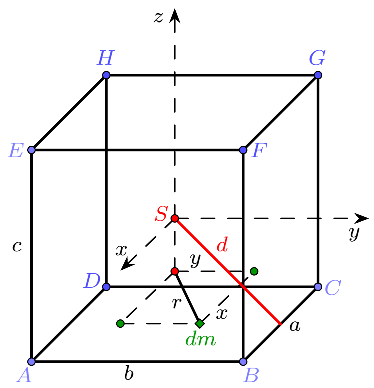
Das Massenträgheitsmoment eines Quaders bei der Drehung um eine seiner Kanten a, b oder c

Das Massenträgheitsmoment eines Quaders bezüglich einer seiner Kanten wird zunächst bezüglich der z-Achse bestimmt. Dabei wird der Schwerpunkt des Quaders in den Koordinatenursprung gelegt. Ein Masseteilchen dm hat den Abstand r von der z-Achse. Das Trägheitsmoment des Masseteilchens kann errechnet werden mit der Gleichung



$$dJ = r^2 \cdot dm.$$

Weiterhin ist $r^2 = x^2 + y^2$ und $dm = \rho \cdot dV$, so dass

$$dJ = (x^2 + y^2) \cdot \rho \cdot dV$$

Um alle Masseteilchen des Quaders zu erfassen, müssen die einzelnen Massenträgheitsmomente aufsummiert werden.

Dabei hilft das Integral $\quad J_z = \rho \cdot \int\limits_V (x^2 + y^2) \cdot dV.$

Die Integration kann nacheinander in jede Achsrichtung erfolgen. Die Integrationsgrenzen werden dabei so gewählt, dass über das gesamte Volumen des Quaders integriert wird, also

nach z integriert $\quad J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} (x^2+y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[(x^2 + y^2) \cdot z\right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \cdot dx \cdot dy,$

$$J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) \cdot c \cdot dx \cdot dy, \quad J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 \cdot c + y^2 \cdot c) \cdot dx \cdot dy,$$

nach y integriert $\quad J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[x^2 \cdot c \cdot y + \frac{y^3}{3} \cdot c\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cdot dx, \quad J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 2 \cdot \left(x^2 \cdot c \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^3}{24} \cdot c\right) \cdot dx,$

$$J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(x^2 \cdot b \cdot c + \frac{b^3}{12} \cdot c\right) \cdot dx,$$

nach x integriert $\quad J_z = \rho \cdot \left[\frac{x^3}{3} \cdot b \cdot c + \frac{b^3}{12} \cdot c \cdot x\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}, \quad J_z = \rho \cdot 2 \cdot \left(\frac{a^3}{24} \cdot b \cdot c + \frac{b^3}{12} \cdot c \cdot \frac{a}{2}\right),$

$$J_z = \rho \cdot \left(\frac{a^3}{12} \cdot b \cdot c + \frac{b^3}{12} \cdot c \cdot a\right), \quad J_z = \rho \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right),$$

mit $m = \rho \cdot a \cdot b \cdot c \quad \underline{\underline{J_z = \frac{m}{12} \cdot \left(a^2 + b^2\right)}}.$

Ein Quaders mit einer Tiefe a, einer Breite b und einer Höhe c hat bezüglich der z-Achse, die durch den Schwerpunkt des Quaders verläuft, das Massenträgheitsmoment $J_z = \frac{m}{12} \cdot \left(a^2 + b^2\right)$.
Analog ist das Massenträgheitsmoment bezüglich der y-Achse durch den Schwerpunkt $J_y = \frac{m}{12} \cdot \left(a^2 + c^2\right)$ und bezüglich der x-Achse durch den Schwerpunkt $J_x = \frac{m}{12} \cdot \left(b^2 + c^2\right)$.
Der Trägheitstensor J im Hauptachsensystem durch den Schwerpunkt ist bestimmt durch

$$J = \frac{m}{12} \cdot \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Ändert sich bei einer Drehbewegung die Rotationsachse, so ändert sich auch das Massenträgheitsmoment bezüglich dieser Achse. Der Satz von Steiner muss angewandt werden. Bei einer Rotation des Quaders um die Seite $a = \overline{BC}$ liegt a parallel zur x-Achse. Das Massenträgheitsmoment verändert sich mit Hilfe des Steinerschen Satzes bei einem Abstand d zur x-Achse zu $J_a = J_x + m \cdot d^2$. Dabei ist $d^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{c}{2}\right)^2$.

$$J_a = J_x + m \cdot \left(\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}\right), \quad J_a = \frac{m}{12} \cdot (b^2 + c^2) + \frac{m}{4} \cdot (b^2 + c^2),$$

$$J_a = \frac{m}{3} \cdot \left(b^2 + c^2\right).$$

Analog wird $\quad J_b = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + c^2\right), \quad J_c = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + b^2\right).$