Das Massenträgheitsmoment eines schiefen Prismas

Der Koordinatenursprung wird in den Schwerpunkt S des schiefen Prismas gelegt. Zuerst soll das Massenträgheitsmoment bezüglich der z-Achse bestimmt werden. Die Masse des Prismas ist $m = \rho \cdot a \cdot b \cdot h$. Ein Masseteilchen dm hat den Abstand r von der z-Achse, das Trägheitsmoment J_T des Teilchens kann bestimmt werden mit der Gleichung

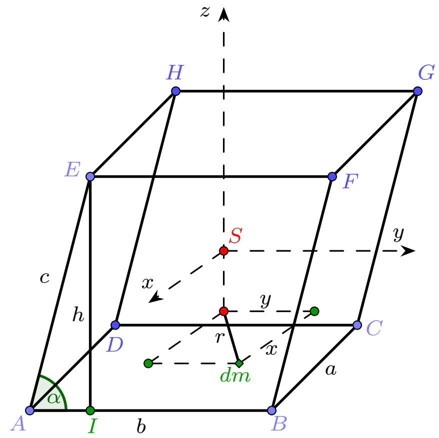
$$dJ_T = r^2 \cdot dm.$$

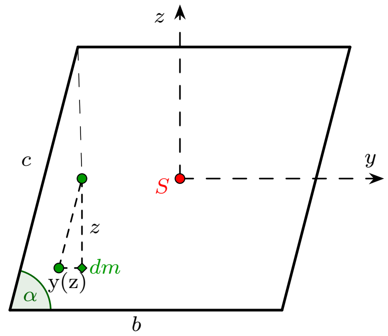
Weiterhin ist $r^2 = x^2 + y^2$ und $dm = \rho \cdot dV$, so dass

$$dJ_T = (x^2 + y^2) \cdot \rho \cdot dV.$$

Um alle Masseteilchen des Prismas zu erfassen, müssen die einzelnen Massenträgheitsmomente aufsummiert werden.

Dabei hilft das Integral $\quad J_z = \rho \cdot \int\limits_V (x^2 + y^2) \cdot dV.$





Die Integration erfolgt nacheinander in jede Achsrichtung. Die Integrationsgrenzen werden dabei so gewählt, dass über das gesamte Volumen des Quaders integriert wird. Als Ausgangspunkt dient der Schwerpunkt des Prismas. Die x-Werte laufen von $-\frac{a}{2}$ bis $\frac{a}{2}$. Die y-Grenzen sind abhängig von der Höhe z der Masseteilchen. So ist $y(z) = \frac{z}{tan\ \alpha}$, was die Grenzen $-\frac{b}{2} + \frac{z}{tan\ \alpha}$ und $\frac{b}{2} + \frac{z}{tan\ \alpha}$ liefert. Abschließend muss über die gesamte Höhe mit den Grenzen $-\frac{c}{2} \cdot sin\ \alpha$ und $\frac{c}{2} \cdot sin\ \alpha$ integriert werden.

$$J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \int\limits_{-\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}^{\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

nach x integriert $\quad J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \int\limits_{-\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}^{\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 \cdot x\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cdot dy \cdot dz,$

$$J_z = \rho \cdot \int\limits_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \int\limits_{-\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}^{\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}} \left(\frac{a^3}{12} + y^2 \cdot a\right) \cdot dy \cdot dz,$$

nach y integriert $\quad J_z = \rho \cdot a \cdot \int\limits_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \left[\frac{a^2}{12} \cdot y + \frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}^{\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}} \cdot dz,$

$$J_z = \rho \cdot a \cdot \int\limits_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \left(\frac{a^2}{12} \cdot b + \frac{\frac{b^3}{8} + \frac{3\cdot b^2\cdot z}{4\cdot tan\ \alpha} + \frac{3\cdot b\cdot z^2}{2\cdot tan^2\alpha} + \frac{z^3}{tan^3\alpha} - \left(-\frac{b^3}{8} + \frac{3\cdot b^2\cdot z}{4\cdot tan\ \alpha} - \frac{3\cdot b\cdot z^2}{2\cdot tan^2\alpha} + \frac{z^3}{tan^3\alpha}\right)}{3}\right) \cdot dz,$$

$$J_z = \rho \cdot a \cdot \int\limits_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \left(\frac{a^2}{12} \cdot b + \frac{\frac{b^3}{4} + \frac{3\cdot b\cdot z^2}{tan^2\alpha}}{3}\right) \cdot dz,$$

$$J_z = \rho \cdot a \cdot \int\limits_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \left(\frac{a^2\cdot b}{12} + \frac{b^3}{12} + \frac{b\cdot z^2}{tan^2\alpha}\right) \cdot dz,$$

nach z integriert $\quad J_z = \rho \cdot a \cdot b \cdot \left[\frac{a^2}{12} \cdot z + \frac{b^2}{12} \cdot z + \frac{z^3}{3\cdot tan^2\alpha}\right]_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha},$

$$J_z = \rho \cdot a \cdot b \cdot \left(\frac{a^2}{12} \cdot c \cdot sin\ \alpha + \frac{b^2}{12} \cdot c \cdot sin\ \alpha + \frac{2\cdot c^3\cdot sin^3\alpha}{8\cdot 3\cdot tan^2\alpha}\right),$$

$h = c \cdot sin\ \alpha \quad J_z = \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot a \cdot b \cdot h \cdot \left(a^2 + b^2 + \frac{c^2\cdot sin^2\alpha}{tan^2\alpha}\right), \quad J_z = \frac{m}{12} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 \cdot cos^2\alpha\right)$

$cos\ \alpha = \frac{\overline{AI}}{c} \quad J_z = \frac{m}{12} \cdot \left(a^2 + b^2 + \cancel{c^2} \cdot \frac{\overline{AI}^2}{\cancel{c^2}}\right) \quad \underline{\underline{J_z = \frac{m}{12} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 - h^2\right).}}$

Das Massenträgheitsmoment bei einer Rotation um die y-Achse erfolgt analog. Die Integrationsgrenzen verändern sich nicht, wohl aber die Ausgangsgleichung zu $J_y = \rho \cdot \int\limits_V (x^2 + z^2) \cdot dV$.

Das bedeutet
$$J_y = \rho \cdot \int_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \int_{-\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}^{\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2+z^2)\cdot dx\cdot dy\cdot dz,$$

nach x integriert
$$J_y = \rho \cdot \int_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \int_{-\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}^{\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}} \left[\frac{x^3}{3}+z^2\cdot x\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\cdot dy\cdot dz,$$
$$J_y = \rho \cdot \int_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \int_{-\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}^{\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}} \left(\frac{a^3}{12}+z^2\cdot a\right)\cdot dy\cdot dz,$$

nach y integriert
$$J_y = \rho\cdot a \cdot \int_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \left[\frac{a^2}{12}\cdot y+z^2\cdot y\right]_{-\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}^{\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}\cdot dz,$$
$$J_y = \rho\cdot a \cdot \int_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \left(\frac{a^2}{12}\cdot b+z^2\cdot b\right)\cdot dz,$$

nach z integriert
$$J_y = \rho\cdot a\cdot b\cdot \left[\frac{a^2}{12}\cdot z+\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha},$$
$$J_y = \rho\cdot a\cdot b\cdot \left(\frac{a^2}{12}\cdot c\cdot sin\ \alpha+\frac{c^3\cdot sin^3\alpha}{12}\right),$$

$c\cdot sin\ \alpha = h$
$$J_y = \frac{1}{12}\cdot\rho\cdot a\cdot b\cdot h\cdot\left(a^2+c^2\cdot sin^2\alpha\right),$$

$\rho\cdot a\cdot b\cdot h = m$
$$\underline{\underline{J_y = \frac{m}{12}\cdot\left(a^2+h^2\right).}}$$

Bleibt noch die Untersuchung zum Trägheitsmoment bei der Rotation um die x-Achse.

Hier ist
$$J_x = \rho\cdot\int_V \left(y^2+z^2\right)\cdot dV,$$
$$J_x = \rho \cdot \int_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \int_{-\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}^{\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(y^2+z^2\right)\cdot dx\cdot dy\cdot dz,$$

nach x integriert
$$J_x = \rho \cdot \int_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \int_{-\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}^{\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}} \left[\left(y^2+z^2\right)\cdot x\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\cdot dy\cdot dz,$$
$$J_x = \rho \cdot \int_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \int_{-\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}^{\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}} \left(y^2+z^2\right)\cdot a\cdot dy\cdot dz,$$

nach y integriert
$$J_x = \rho\cdot a\cdot \int_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \left[\frac{y^3}{3}+z^2\cdot y\right]_{-\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}^{\frac{b}{2}+\frac{z}{tan\ \alpha}}\cdot dz,$$
$$J_x = \rho\cdot a\cdot \int_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \left(\frac{\frac{b^3}{8}+\frac{3\cdot b^2\cdot z}{4\cdot tan\ \alpha}+\frac{3\cdot b\cdot z^2}{2\cdot tan^2\alpha}+\frac{z^3}{tan^3\alpha}-\left(-\frac{b^3}{8}+\frac{3\cdot b^2\cdot z}{4\cdot tan\ \alpha}-\frac{3\cdot b\cdot z^2}{2\cdot tan^2\alpha}+\frac{z^3}{tan^3\alpha}\right)}{3}+z^2\cdot b\right)\cdot dz,$$
$$J_x = \rho\cdot a\cdot b\cdot \int_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha} \left(\frac{\frac{b^2}{4}+\frac{3\cdot z^2}{tan^2\alpha}}{3}+z^2\right)\cdot dz,$$

nach z integriert
$$J_x = \rho\cdot a\cdot b\cdot \left[\frac{b^2}{12}\cdot z+\frac{z^3}{3\cdot tan^2\alpha}+\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha}^{\frac{c}{2}\cdot sin\ \alpha},$$
$$J_x = \rho\cdot a\cdot b\cdot \left(\frac{b^2}{12}\cdot c\cdot sin\ \alpha+\frac{2\cdot c^3\cdot sin^3\alpha}{8\cdot 3\cdot tan^2\alpha}+\frac{2\cdot c^3\cdot sin^3\alpha}{8\cdot 3}\right),$$

$c\cdot sin\ \alpha = h$
$$J_x = \frac{1}{12}\cdot\rho\cdot a\cdot b\cdot h\cdot\left(b^2+c^2\cdot cos^2\alpha+c^2\cdot sin^2\alpha\right),$$

$\rho\cdot a\cdot b\cdot h = m$
$$J_x = \frac{m}{12}\cdot\left(b^2+c^2\cdot\left(cos^2\alpha+sin^2\alpha\right)\right),$$

$cos^2\alpha+sin^2\alpha = 1$
$$\underline{\underline{J_x = \frac{m}{12}\cdot\left(b^2+c^2\right).}}$$

Der Trägheitstensor J im Hauptachsensystem durch den Schwerpunkt eines Prismas ist

bestimmt durch
$$J = \frac{m}{12}\cdot\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0\\ 0 & a^2+h^2 & 0\\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2-h^2\end{pmatrix}.$$

Ein großes Dankeschön geht an Andreas Grieser für seine klugen Ratschläge zu den Herleitungen.