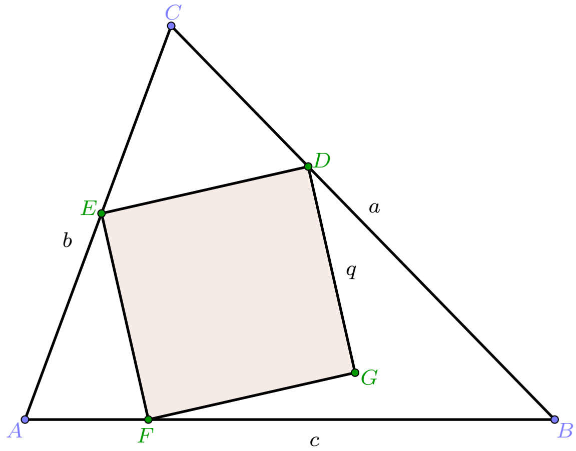
Größtes Quadrat im spitzwinkligen Dreieck

Einem spitzwinkligen Dreieck soll ein Quadrat einbeschrieben werden.
Wie muss das geschehen, damit der Flächeninhalt des Quadrates maximal wird?

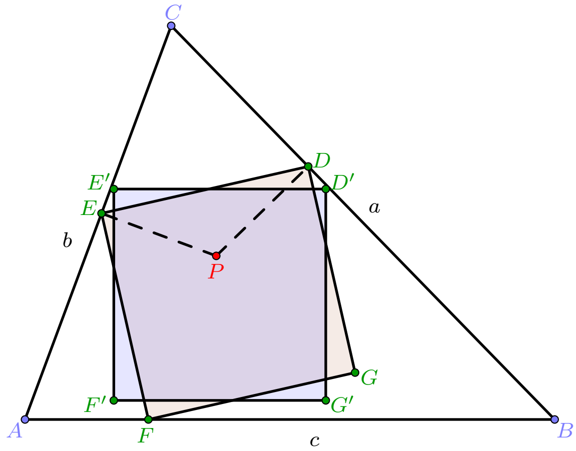
Aufgabe 2022-7 aus dem Heft die $\sqrt{Wurzel}$ von Hartmut Nollau, Bebersdorf

Lösung

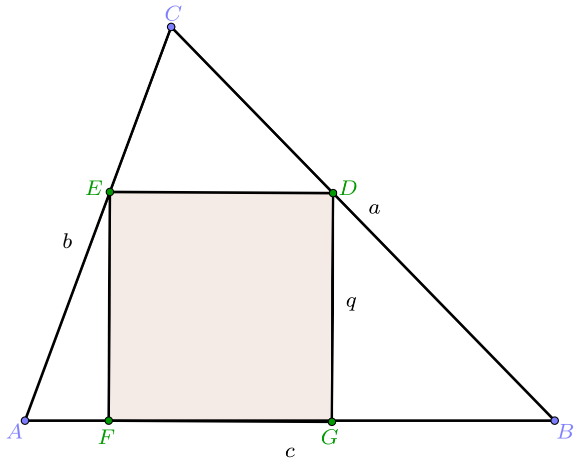
Das Quadrat $\square DEFG$ habe die Seitenlänge q. Zunächst soll gezeigt werden, wenn genau drei Punkte des Quadrats auf eine jeweils andere Dreiecksseite liegen, wird es nicht maximal.



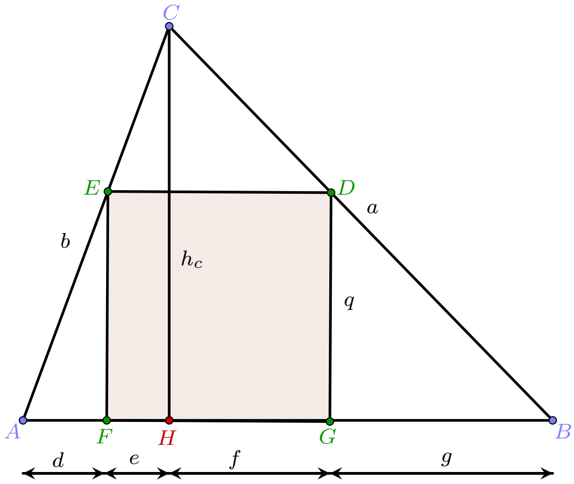
Der Schnittpunkt der Senkrechten zu den Seiten a und b durch die Punkte D und E sei der Punkt P. Dreht man das Quadrat $\square DEFG$ um P, so dass die Seite $\overline{F'G'}$ parallel zur Seite c liegt, ist zu erkennen, dass es immer ein größeres Quadrat als $\square DEFG \cong \square D'E'F'G$ gibt.



Eine Quadratseite muss auf einer Dreiecksseite liegen, angenommen q liegt auf c.



Die Seite c wird entsprechend eingeteilt, so dass der Strahlensatz genutzt werden kann.



Es ist $\frac{d}{q} = \frac{d+e}{h_c}$ ...(1),

$\frac{g}{q} = \frac{f+g}{h_c}$ ...(2),

(1)+(2) $\frac{d+g}{q} = \frac{d+e+f+g}{h_c}$,

$d+g = c-q$, $d+e+f+g = c$ $\quad \frac{c-q}{q} = \frac{c}{h_c}$, $\quad q = \frac{c \cdot h_c}{c+h_c}$ ...(3).

Wird q auf a gelegt, entsteht $q = \frac{a \cdot h_a}{a+h_c}$ ...(4),

wird q auf b gelegt, entsteht $q = \frac{b \cdot h_b}{b+h_c}$ ...(5).

Es muss untersucht werden, welches q von (3), (4) oder (5) am größten ist.
Die Produkte $a \cdot h_a$, $b \cdot h_b$ und $c \cdot h_c$ sind gleich, da sie jeweils dem doppelten Flächeninhalt $2 \cdot A$ des Dreiecks entsprechen. k sei die Konstante $k = 2 \cdot A$.

Dann ist $\frac{k}{q} = a + h_a$, $\frac{k}{q} = b + h_b$, $\frac{k}{q} = c + h_c$.

Damit q maximal wird, muss die Summe aus der Seitenlänge des Dreiecks und der dazugehörigen Höhe minimal werden.
Einen Grenzfall bildet das rechtwinklige Dreieck. Hat es Seitenlängen von $a = 3\ cm$, $b = 4\ cm$ und $c = 5\ cm$, dann sind die Summen $a + h_a = 7\ cm$, $b + h_b = 7\ cm$ und $c + h_c = 7{,}4\ cm$. Die längste Seite besitzt auch die größte Summe aus Seite und dazugehöriger Höhe. Ein spitzwinkliges Dreieck weicht nur marginal vom rechtwinkligen Dreieck ab.
Schlussfolgerung: Das Quadrat muss auf der kleinsten Seite des spitzwinkligen Dreiecks liegen, damit der Flächeninhalt des einbeschrieben Quadrates maximal wird.