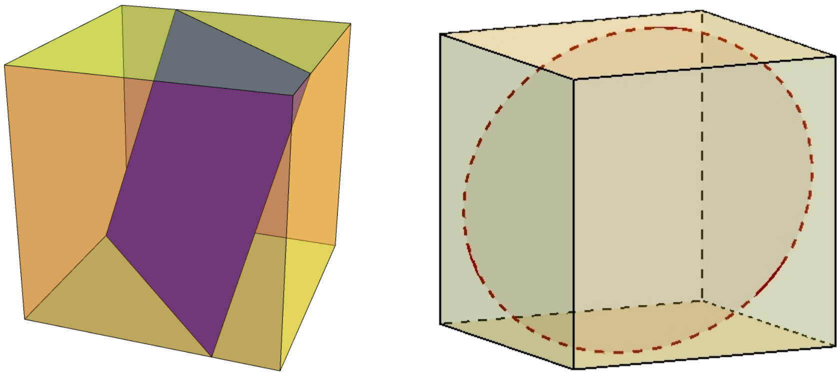
Größtes Quadrat und größter Kreis in einem Würfel

Einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 1,0\ m$ soll ein möglichst großes Quadrat und ein möglichst großer Kreis einbeschrieben werden.

a) Welche Seitenlänge ℓ besitzt das Quadrat?

b) Welchen Durchmesser d besitzt der Kreis?

c) Welche der beiden ebenen Figuren besitzt den größeren Flächeninhalt bzw. Umfang?

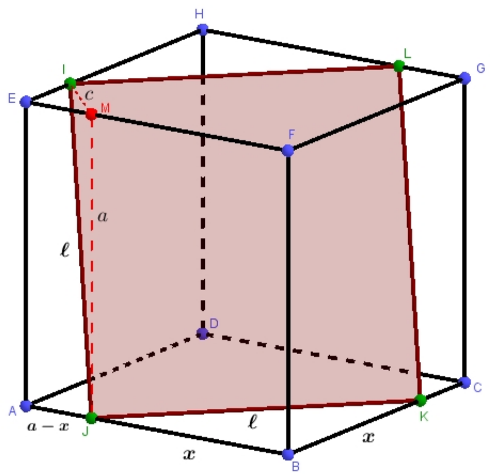


a) b)

Aufgabe a) von Pieter Nieuwland (1764-1794), bereitgestellt von Dr. Eugen Willerding am 16.02.2022
Aufgabe b) auf `https://www.spektrum.de/raetsel/der-kreis-im-wuerfel/1645732`
von Heinrich Hemme vom 28.05.2019, gefunden von Andreas Grieser am 19.02.2022

Lösung

a) Die Strecke x muss berechnet werden.



Im Dreieck ΔJBK ist $\quad \ell^2 = 2 \cdot x^2 \quad$ ...(1),

im Dreieck ΔEMI ist $\quad c^2 = 2 \cdot (a-x)^2 \quad$ ...(2),

im Dreieck ΔJMI ist mit (2) $\quad \ell^2 = a^2 + c^2, \quad \ell^2 = a^2 + 2 \cdot (a-x)^2 \quad$ ...(3),

(1)=(3) $\quad 2 \cdot x^2 = a^2 + 2 \cdot (a-x)^2, \quad 2 \cdot x^2 = a^2 + 2 \cdot a^2 - 4 \cdot a \cdot x + 2 \cdot x^2,$

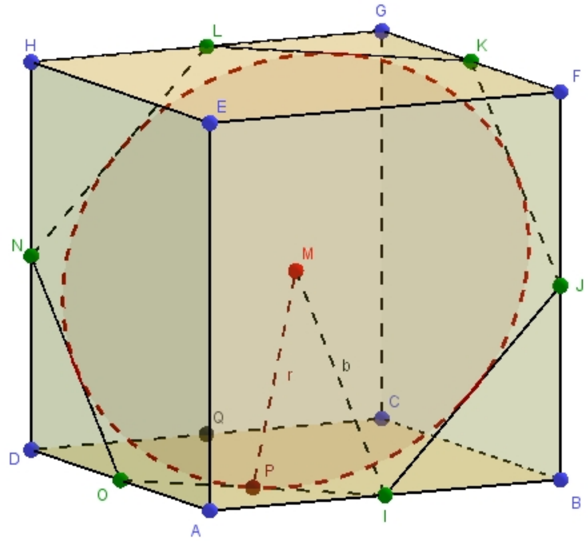
$\quad 4 \cdot a \cdot x = 3 \cdot a^2, \quad x = \frac{3}{4} \cdot a \quad$ ...(4).

Damit ist mit (4) in (1) $\quad \ell^2 = 2 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot a\right)^2, \quad \ell^2 = \frac{9}{8} \cdot a^2,$

wenn $a = 1\ m$, ist $\quad \ell = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}\ m, \quad \underline{\underline{\ell = 1{,}06066\ m}}.$

Das größte, dem Würfel einbeschriebene, Quadrat hat eine Seitenlänge von $\ell = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}\ m$.

b) Verbindet man die Mitten von sechs der zwölf Kanten, entsteht ein regelmäßiges Sechseck.



Mit dem Satz von Pythagoras kann der Radius des Kreises berechnet werden.

Im Dreieck ΔILQ ist $\quad (2 \cdot b)^2 = 2 \cdot a^2 \quad b^2 = \frac{1}{2} \cdot a^2 \quad$ ...(5),

im Dreieck ΔOAI ist $\quad \overline{IO}^2 = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad \overline{IO}^2 = \frac{1}{2} \cdot a^2,$

$\overline{IP} = \frac{\overline{IO}}{2} \quad \overline{IO} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a, \quad \overline{IP} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot a \quad$ ...(6).

Im Dreieck ΔIMP ist mit (5), (6) $\quad r^2 = b^2 - \overline{IP}^2, \quad r^2 = \frac{1}{2} \cdot a^2 - \frac{1}{8} \cdot a^2,$

$r^2 = \frac{3}{8} \cdot a^2, \quad r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a,$

mit $a = 1\ m \quad r = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{6} \cdot a, \quad r = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{6}\ m,$

$d = 2 \cdot r \quad d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}\ m, \quad \underline{\underline{d = 1{,}22474\ m.}}$

Der größte, dem Würfel einbeschriebene, Kreis hat einen Durchmesser von $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}\ m.$

c) Mit der Seitenlänge ℓ und dem Radius r können die Flächeninhalte bestimmt werden.

So ist $\quad A_Q = \ell^2, \quad A_Q = \frac{9}{8}\ m^2$

und $\quad A_K = \pi \cdot r^2, \quad A_K = \frac{3 \cdot \pi}{8}\ m^2.$

Damit gewinnt der Kreis knapp gegen das Quadrat im Rennen um die größte, einem Würfel einbeschriebene, Fläche.

Der Umfang des Quadrats ist $\quad u_Q = 4 \cdot \ell, \quad u_Q = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot a,$

mit $a = 1\ m \quad u_Q = 3 \cdot \sqrt{2}\ m, \quad u_Q = 4{,}24261\ m.$

Der Umfang des Kreises ist $\quad u_K = 2 \cdot \pi \cdot r \quad u_K = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{6} \cdot a$

$u_K = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \sqrt{6}\ m \quad u_K = 3{,}84765\ m.$

Im Rennen um den größeren Umfang gewinnt das Quadrat.