Maximaler Quader

Ein Quader mit den Seitenlängen x, y und z und $x + y + z = 12$ soll so gewählt werden, dass sein Volumen möglichst groß ist. Finde die zugehörigen Seitenlängen.

Aufgabe 1290 aus dem 150. Heft „Monoid“ vom Juni 2022

Lösung

Von allen Quadern mit den Seitenlängen x, y, z und $x + y + z = 12$ hat der Würfel mit der Seitenlänge $x = y = z$ das größte Volumen. Damit ist $3 \cdot x = 12$, $x = 4$ und $V = x^3$, $V = 64\ VE$.
Dies soll nun rechnerisch überprüft werden. Das Volumen des Quaders kann mit der Gleichung $V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ bestimmt werden. Es gilt die Bedingung
$z = 12 - x - y$ und es entsteht $V(x, y) = x \cdot y \cdot (12 - x - y)$, $V(x, y) = 12 \cdot x \cdot y - x^2 \cdot y - x \cdot y^2$ ...(1).
Es müssen alle Punkte $P(x \mid y \mid z)$gefunden werden, deren erste Ableitung von (1) null und deren zweite Ableitung nicht null wird. Dazu werden die partiellen Ableitungen nach x und y betrachtet. Die partielle Ableitung als notwendige Bedingung

nach x ist mit (1)	$V_x(x, y) = \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}$,	$V_x(x, y) = 12 \cdot y - 2 \cdot x \cdot y - y^2$	...(2),
$V_x(x, y) = 0, \mid : y \neq 0$	$0 = 12 - 2 \cdot x - y$,	$y = 2 \cdot (6 - x)$	...(3),
die Ableitung nach y ist	$V_y(x, y) = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$,	$V_y(x, y) = 12 \cdot x - 2 \cdot x \cdot y - x^2$	...(4),
$V_y(x, y) = 0, \mid : x \neq 0$	$x = 2 \cdot (6 - y)$,		...(5),
(3) in (5)	$x = 2 \cdot (6 - 2 \cdot (6 - x))$,	$x = 2 \cdot (2 \cdot x - 6)$,	
	$-3 \cdot x = -12$,	$\underline{\underline{x_E = 4}}$	...(6),
(6) in (3)	$y = 2 \cdot (6 - 4)$,	$\underline{\underline{y_E = 4}}$	...(7),
z-Bestimmung mit (6), (7)	$z = 12 - 4 - 4$	$\underline{\underline{z_E = 4}}$.	

Der vermutete Punkt P für ein lokales Maximum hat die Koordinaten $P(4 \mid 4 \mid 4)$.
Für die hinreichende Bedingung müssen beide partiellen Ableitungen noch einmal abgleitet werden.

So ist $V_x' = V_{xx}(x, y)$ von (2)	$V_{xx}(x, y) = -2 \cdot y$,	$V_{xx}(x_E, y_E) = -8$	...(8),
und $V_y' = V_{yy}(x, y)$ von (4)	$V_{yy}(x, y) = -2 \cdot x$,	$V_{yy}(x_E, y_E) = -8$	...(9).

Die gemischte zweite Ableitung nach x und y kann mit der Ableitung von (2) nach y ermittelt werden, dabei ist $V_{xy}(x, y) = 12 - 2 \cdot x - 2 \cdot y$, $V_{xy}(x_E, y_E) = 12 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 4$,
$V_{xy}(x, y) = -4$ ...(10).
(8), (9) und (10) können in eine Matrix, der sogenannten Hesse-Matrix, dargestellt werden.
Es ist $V_{xy}(x, y) = V_{yx}(x, y)$ $H = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} \\ V_{yx} & V_{yy} \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$.
Der erste Hauptminor ist der Eintrag oben links $H_1 = -8$.
Der zweite Hauptminor (Determinante) der zweiten Teilmatrix H_2 kann mit der Sarrus-Regel berechnet werden, es ist $H_2 = -8 \cdot (-8) - (-4) \cdot (-4)$, $H_2 = 48$.
Die Determinante von H_1 ist negativ, von H_2 positiv, die Hauptminoren wechseln demnach ihre Vorzeichen, so ist nach dem Kriterium von Sylvester die Hesse-Matrix negativ. Außerdem sind alle Werte in der Hesse-Matrix negativ. Es kann geschlussfolgert werden, dass es sich bei P um ein lokales Maximum handelt.
Der Quader mit den Seitenlängen x, y, z und $x + y + z = 12$ hat bei gleichen Seitenlängen von $x = 4\ LE$ sein maximales Volumen von $V = 64\ VE$.