Ein Mordfall

Um Mitternacht in einer lauen Sommernacht wird der polizeibekannte Schurke Ede, genannt „das Messer“, tot aufgefunden. Der herbeigerufene Gerichtsmediziner stellt eine Körpertemperatur von $30°C$ fest. Zwei Stunden später betrug Edes Temperatur nur noch $24°C$, die Umgebungstemperatur war immer noch $20°C$.
Zur Aufklärung des Mordfalls (und der Prüfung der Alibis möglicher Verdächtiger) spielt der genaue Todeszeitpunkt von Ede eine wichtige Rolle.
Der Gerichtsmediziner basiert seine Berechnung auf der Newtonschen Abkühlungsregel:
Die Geschwindigkeit der Abkühlung ist proportional zur Differenz zwischen Körper- und Umgebungstemperatur.
Der Mediziner hat zu zwei Zeiten die Leichentemperatur gemessen:

Zeit t	Körpertemperatur ϑ in $°C$
0 Uhr	$30°C$
2 Uhr	$24°C$

Die Umgebungstemperatur betrug $20°C$ Celsius,
Ede's Körpertemperatur vor seinem Tod $37°C$.

Aufgabe von Joachim Engel aus dem Buch „Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion“, https://www.springer.com/de/book/9783540890874, aus dem Jahr 2018

Lösung

Es handelt sich bei der Aufgabe um eine beschränkte Abnahme, die durch eine Funktion der Form $f(t) = G + b \cdot e^{-k\cdot t}$ beschrieben werden kann. Dabei entspricht G die Grenze von $G = 20°C$ und b die Differenz zwischen der Ausgangstemperatur und der Grenze, also $b = 17°C$.

Funktionsgleichung $\quad f(t) = 20°C + 17°C \cdot e^{-k\cdot t}$

zum Zeitpunkt t_1 $\quad 30°C = 20°C + 17°C \cdot e^{-k\cdot t_1} \quad \frac{10}{17} = e^{-k\cdot t_1} \quad ...(1)$

zum Zeitpunkt $t_2 = t_1 + 2$ $\quad 24°C = 20°C + 17°C \cdot e^{-k\cdot t_2} \quad \frac{4}{17} = e^{-k\cdot(t_1+2)}$

umformen $\quad \frac{4}{17} = e^{-k\cdot t_1} \cdot e^{-2\cdot k}$

mit (1) $\quad \frac{4}{17} = \frac{10}{17} \cdot e^{-2\cdot k} \quad \underline{\underline{k = -\frac{1}{2} \cdot ln\ \frac{2}{5}}}$

neue Funktionsgleichung $\quad f(t) = 20°C + 17°C \cdot e^{-\left(-\frac{1}{2}\cdot ln\ \frac{2}{5}\right)\cdot t}$

$f(t) = 20°C + 17°C \cdot e^{-\left(-\frac{1}{2}\cdot ln\ \frac{2}{5}\right)\cdot t}$

$\underline{\underline{f(t) = 20°C + 17°C \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^t}}}$

Berechnung von t_1 $\quad 30°C = 20°C + 17°C \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^{t_1}} \quad \frac{10}{17} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^{t_1}}$

$\frac{100}{289} = \left(\frac{2}{5}\right)^{t_1} \quad t_1 = \frac{ln\ \frac{100}{289}}{ln\ \frac{2}{5}}$

$\underline{\underline{t_1 = 1{,}15820936}}$

Der Mord fand rund eine Stunde und 9,5 Minuten vor Mitternacht statt, also um ca. 22:50 Uhr.