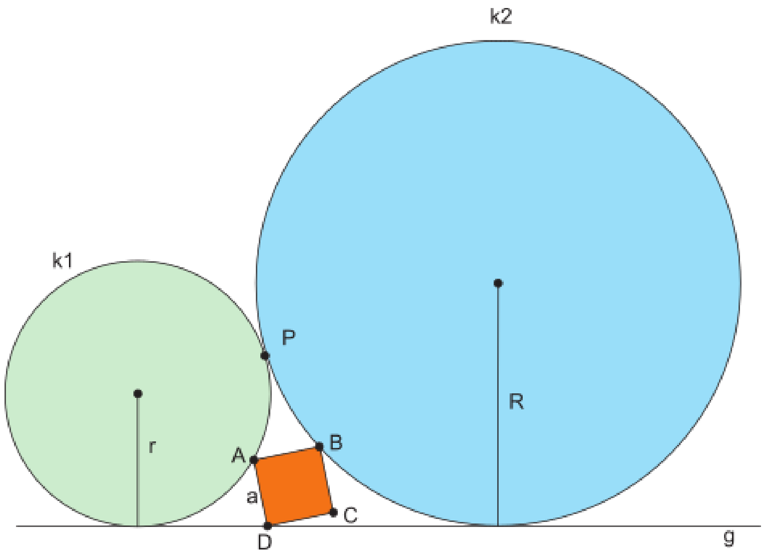
Quadrat unter zwei Kreisen

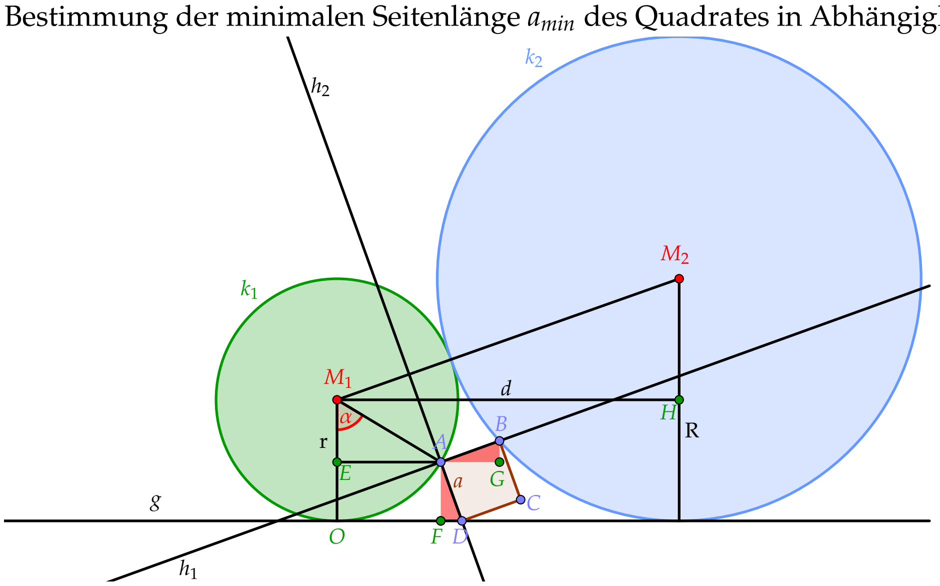
Gegeben sind die Kreise k_1 mit dem Radius r und k_2 mit dem Radius R. Beide Kreise haben die gemeinsame Tangente g und berühren sich untereinander im Punkt P . Ein Quadrat $\square ABCD$ mit der Seitenlänge a ist dem Raum zwischen den beiden Kreisen und der Tangente g einbeschrieben, so dass der Punkt A auf k_1 liegt, der Punkt B auf k_2 und der Punkt D auf g.
Welche Seitenlänge hat ein Quadrat mit maximaler und ein Quadrat mit minimaler Seitenlänge, dass auf die beschriebene Art zwischen den beiden Kreisen und Geraden g liegt?
Die Ecke C darf nicht unterhalb von g liegen.

Aufgabe von Hidetoshi Fukagawa „Das optimale Quadrat zwischen zwei Kreisen“, Japanese Temple Geometry



Lösung

a) Bestimmung der minimalen Seitenlänge a_{min} des Quadrates in Abhängigkeit r, R und α



Der horizontale Abstand $\overline{M_1H} = d$ beider Mittelpunkte M_1 und M_2 kann bestimmt werden.

Er beträgt $\qquad (R + r)^2 = d^2 + (R - r)^2, \qquad d = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} \qquad$ ...(1).

Der Punkt O wird in den Koordinatenursprung gelegt und die y-Koordinate des Punktes A befindet sich auf dem Kreis k_1 zwischen 0 und der y-Koordinate von M_1. Die Dreiecke ΔAFD und ΔAGB sind stets zueinander kongruent.

Dann ist $y_A = x_B - x_A$ ...(2),

Punkt $A \in k_1$ $\quad x_A^2 + (y_A - r)^2 = r^2, \quad x_A^2 + y_A^2 - 2 \cdot y_A \cdot r = 0$ ...(3),

Punkt $B \in k_2$ $\quad \left(x_B - 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}\right)^2 + (y_B - R)^2 = R^2, \quad \left(x_B - 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}\right)^2 = 2 \cdot y_B \cdot R - y_B^2,$

positive Lsg. entfällt $\quad y_B = R - \sqrt{R^2 - \left(x_B - 2 \cdot \sqrt{Rr}\right)^2}$ ...(4),

Steigung von h_1 $\quad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ mit (4) $\quad m = \frac{y_B - y_A}{y_A}$ ...(5).

(4) in (5), es entsteht $\quad m = \frac{R - \sqrt{R^2 - \left(x_B - 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}\right)^2} - y_A}{y_A}, \quad m = \frac{R - y_A - \sqrt{R^2 - x_B^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot x_B - 4 \cdot r \cdot R}}{y_A},$

mit (2) $\quad m = \frac{R - y_A - \sqrt{R^2 - (x_A + y_A)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R}}{y_A}$ ...(6).

Der Punkt D ist der Schnittpunkt der Geraden h_2 mit der Tangente g auf der x-Achse.

Gerade h_2 mit $h_2 \perp h_1$ $\quad y - y_A = -\frac{1}{m} \cdot (x - x_A),$

mit $y = 0$ $\quad x_D = m \cdot y_A + x_A \quad D\,(m \cdot y_A + x_A \mid 0).$ ...(7).

Die Seitenlänge $a = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2}$ des Quadrats kann berechnet werden.

Dann ist mit (7) $\quad a = \sqrt{(-m \cdot y_A)^2 + (y_A - 0)^2}, \quad a = y_A \cdot \sqrt{1 + m^2},$ ...(8)

und (6) $\quad a = y_A \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{R - y_A - \sqrt{R^2 - (x_A + y_A)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R}}{y_A}\right)^2},$

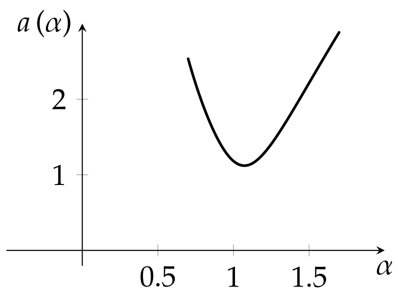
vereinfacht $\quad a = \sqrt{y_A^2 + \left(R - y_A - \sqrt{R^2 - (x_A + y_A)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R}\right)^2}.$

Die Seitenlänge des Quadrats ist abhängig von x_A und y_A.

Im ΔEAM_1 ist $\quad x_A = r \cdot \sin\alpha \quad$ und $\quad y_A = r \cdot (1 - \cos\alpha)$ ...(9).

(9) wird in a eingesetzt, so dass a nur noch vom Winkel α abhängt. Die Funktion $a\,(\alpha)$ lautet

$$a = \sqrt{r^2 \cdot (1 - \cos\alpha)^2 + \left(R - r \cdot (1 - \cos\alpha) - \sqrt{R^2 - r^2 \cdot (1 - \cos\alpha + \sin\alpha)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot r \cdot (1 - \cos\alpha + \sin\alpha) - 4 \cdot r \cdot R}\right)^2}.$$

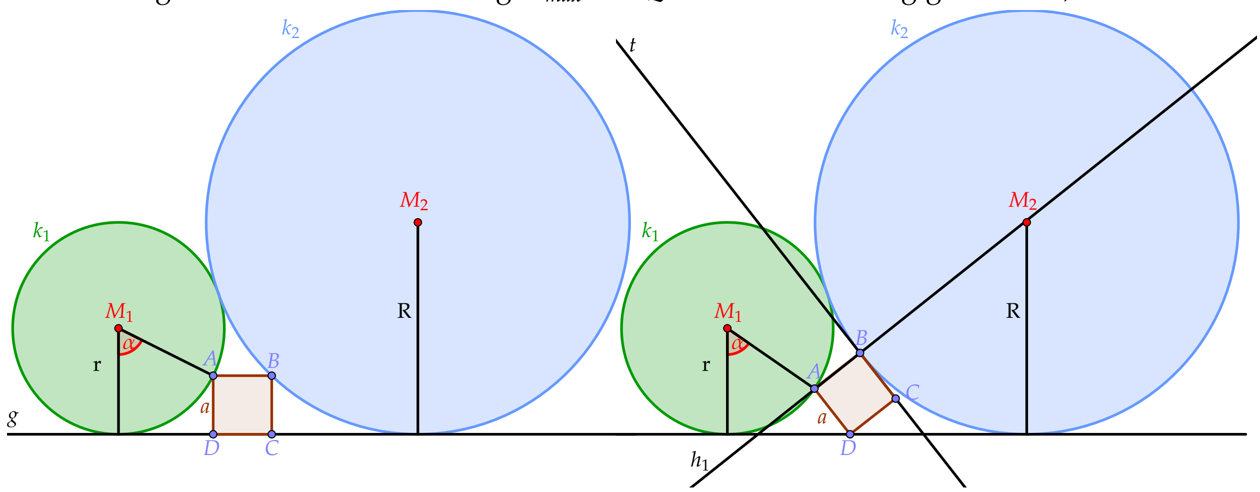


Einige Werte:

r in cm	R in cm	α in °	a_{min} in cm
2,0	2,0	51,1867	0,7708
2,0	3,0	55,8575	0,9206
2,0	4,0	59,0420	1,0324
2,0	5,0	61,4133	1,1212
2,0	6,0	63,2768	1,1946

Die lokale Extremstelle der Funktion $a\,(\alpha) = a_{min}$ gibt den Winkel im Bogenmaß für die kleinste Seitenlänge des Quadrates in Abhängigkeit beider Radien an.

b) Bestimmung der maximalen Seitenlänge a_{max} des Quadrates in Abhängigkeit von r, R und α



Es sind zwei Grenzfälle zu betrachten.
1. Der Punkt B liegt auf gleicher Höhe mit dem Punkt A.
2. Die Punkte B und C liegen auf einer Tangente t an den Kreis k_2.

<u>Betrachtung von Fall 1</u>

Die Steigung der Geraden h_1 durch die Punkte A und B ist $m = 0$.

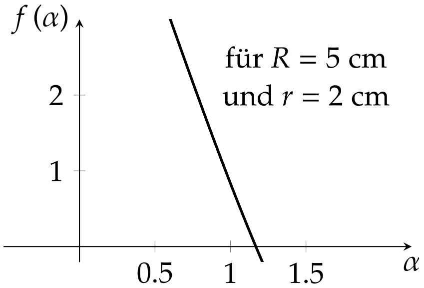
(6) wird zu $\quad 0 = \frac{R - y_A - \sqrt{R^2 - (x_A + y_A)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R}}{y_A},$

$$(y_A - R)^2 = R^2 - (x_A + y_A)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R,$$
$$0 = 2 \cdot y_A \cdot R - y_A^2 - (x_A + y_A)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R,$$
$$(x_A + y_A)_{1,2} = 2 \cdot \sqrt{r \cdot R} \pm \sqrt{y_A \cdot (2 \cdot R - y_A)},$$

pos. Lösung entfällt $\quad 0 = 2 \cdot \sqrt{r \cdot R} - \sqrt{y_A \cdot (2 \cdot R - y_A)} - x_A - y_A,$

mit (9) $\quad 0 = 2 \cdot \sqrt{r \cdot R} - \sqrt{r \cdot (1 - cos\ \alpha) \cdot (2 \cdot R - r \cdot (1 - cos\ \alpha))} - r \cdot (sin\ \alpha + 1 - cos\ \alpha) \quad ...(10).$

(10) beschreibt eine Funktion $f(\alpha)$, deren Nullstelle gesucht wird.



Die Nullstelle von $f(\alpha)$ liegt bei $\alpha = 1{,}16807$, was im Gradmaß $\alpha = 66{,}9257°$ sind. Dies ergibt einen Funktionwert in $a(\alpha)$ von
$a(66{,}9257°) = 1{,}21615$.
Die Seitenlänge des Quadrats im Fall 1 für $R = 5$ cm und $r = 2$ cm beträgt $a = 1{,}21615$ cm.

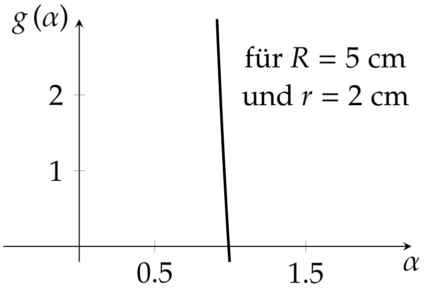
<u>Betrachtung von Fall 2</u>

Die Gerade h_1 durch die Punkte A und B verläuft durch M_2, so dass für die Steigung gilt

$$m = \frac{y_A - y_{M_2}}{x_A - x_{M_2}}, \qquad m = \frac{y_A - R}{x_A - 2 \cdot \sqrt{r \cdot R}},$$
$$m \cdot \left(x_A - 2 \cdot \sqrt{r \cdot R}\right) = y_A - R,$$

mit (6) $\quad \left(\frac{R - y_A - \sqrt{R^2 - (x_A + y_A)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R}}{y_A}\right) \cdot \left(x_A - 2 \cdot \sqrt{r \cdot R}\right) - y_A + R = 0 \quad ...(11).$

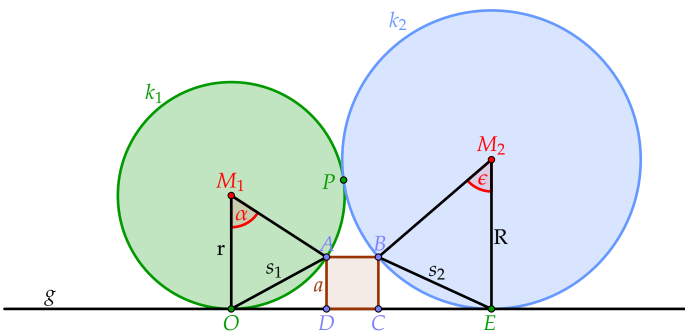
(11) beschreibt eine Funktion $g(\alpha)$, deren Nullstelle gesucht wird.



Die Nullstelle von $g(\alpha)$ liegt bei $\alpha = 0{,}9892$, was im Gradmaß $\alpha = 56{,}6775°$ sind. Dies ergibt einen Funktionwert in $a(\alpha)$ von
$a(56{,}6775°) = 1{,}2011$.
Die Seitenlänge des Quadrats im Fall 2 für $R = 5$ cm und $r = 2$ cm beträgt $a = 1{,}2011$ cm.

Die Nullstellen von $f(\alpha)$ haben immer einen größeren Wert als die von $g(\alpha)$, so dass die Seitenlänge des Quadrats im Fall 1 stets den maximalen Wert annimmt.

c) Bestimmung der Seitenlänge des maximalen Quadrats a_{max} nur in Abhängigkeit von r, R



Die Länge der Sehne s_1 im Kreis k_1 kann bestimmt werden mit der Gleichung

$$s_1 = 2 \cdot r \cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

mit $sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos\ \alpha}{2}}$ $\quad s_1 = 2 \cdot r \cdot \sqrt{\frac{1-cos\ \alpha}{2}},$

mit (9), $y_A = a$ $\quad s_1 = 2 \cdot r \cdot \sqrt{\frac{a}{2 \cdot r}},$ $\quad s_1 = \sqrt{2 \cdot a \cdot r}$ ...(12).

Analog kann die Länge der Sehne s_2 im Kreis k_2 ermittelt werden.

Sie hat eine Länge von $\quad s_2 = \sqrt{2 \cdot a \cdot R}$ ...(13).

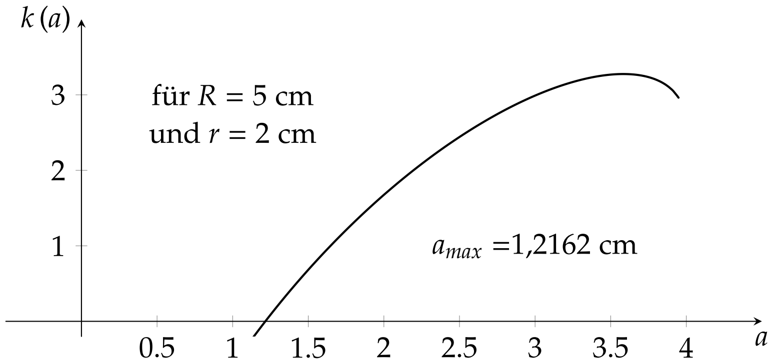
Dann ist $\quad \overline{OE} = \overline{OD} + a + \overline{CE},$ $\quad \overline{OE} = \sqrt{s_1^2 - a^2} + a + \sqrt{s_2^2 - a^2},$

mit (1), (12), (13) $\quad 2 \cdot \sqrt{r \cdot R} = \sqrt{2 \cdot a \cdot r - a^2} + a + \sqrt{2 \cdot a \cdot R - a^2}$ ...(14).

Die Nullstelle der Funktion

$$k(a) = \sqrt{a \cdot (2 \cdot r - a)} + a + \sqrt{a \cdot (2 \cdot R - a)} - 2 \cdot \sqrt{r \cdot R}$$

liefert wegen (14) die maximale Seitenlänge des Quadrats.



Eine Grenzwertbetrachtung bietet sich an.

Mit $r = 1$, ist (14) $\quad 2 \cdot \sqrt{R} = \sqrt{a \cdot (2 - a)} + a + \sqrt{a \cdot (2 \cdot R - a)},$

nach R umgestellt $\quad R = \frac{a^3 + 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{a \cdot (2-a)} + 4 \cdot a \cdot \left(1 + \sqrt{a \cdot (2-a)}\right) + 4 \sqrt{a^3 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{a \cdot (2-a)} + a \cdot \left(5 + \sqrt{a \cdot (2-a)}\right) - 2 \cdot a^2\right)}}{2 \cdot (a-2)^2},$ ...(15)

mit $r = 2$ $\quad R = \frac{a^3 + 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{a \cdot (4-a)} + 8 \cdot a \cdot \left(2 + \sqrt{a \cdot (4-a)}\right) + 4 \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{a \cdot \left(4 \cdot \sqrt{a \cdot (4-a)} + a \cdot \left(10 + \sqrt{a \cdot (4-a)}\right) - 2 \cdot a^2\right)}}{2 \cdot (a-4)^2}$ ...(16).

Der Nenner strebt in (15) für $a \to 2$ gegen Null, der Zähler ist beschränkt und strebt gegen 32. In (16) strebt der Nenner für $a \to 4$ gegen Null, der Zähler ist beschränkt und strebt gegen 200. In diesen beiden Fällen und in allen Fällen, wo r fest ist und der Nenner mit einem festen a gegen Null strebt, strebt R gegen unendlich. Damit ist a der Grenzwert für das maximale Quadrat.

Dies bedeutet $\quad \lim\limits_{R \to \infty} a_{max} = \lim\limits_{R \to \infty} \left(\sqrt{a \cdot (2 \cdot r - a)} + a + \sqrt{a \cdot (2 \cdot R - a)} - 2 \cdot \sqrt{r \cdot R}\right),$

$$\lim_{R \to \infty} a_{max} = 2 \cdot r\ .$$

d) Vergleich einiger Seitenlängen bei gegebenen Radien

r in cm	R in cm	a_{min} in cm	a_{max} in cm
2,0	2,0	0,7708	0,8000
2,0	3,0	0,9206	0,9723
2,0	4,0	1,0324	1,1062
2,0	5,0	1,1212	1,2162
2,0	6,0	1,1946	1,3095

e) Bestimmung der Seitenlänge des minimalen Quadrats a_{min} nur in Abhängigkeit von r, R

Dr. Eugen Willerding hat eine biquadratische Gleichung 14. Grades gefunden, die für $R = 1$ und $r = 1$ die minimale Länge der Quadratseite angibt.

Sie lautet $\quad 0 = -3392 + 25376 \cdot a^2 - 17436 \cdot a^4 + 2253 \cdot a^6 + 282 \cdot a^8 + 42 \cdot a^{10} - 28 \cdot a^{12} + 4 \cdot a^{14}$.

Wolfram Mathematica kann die Gleichung nach a auflösen und liefert den Wert

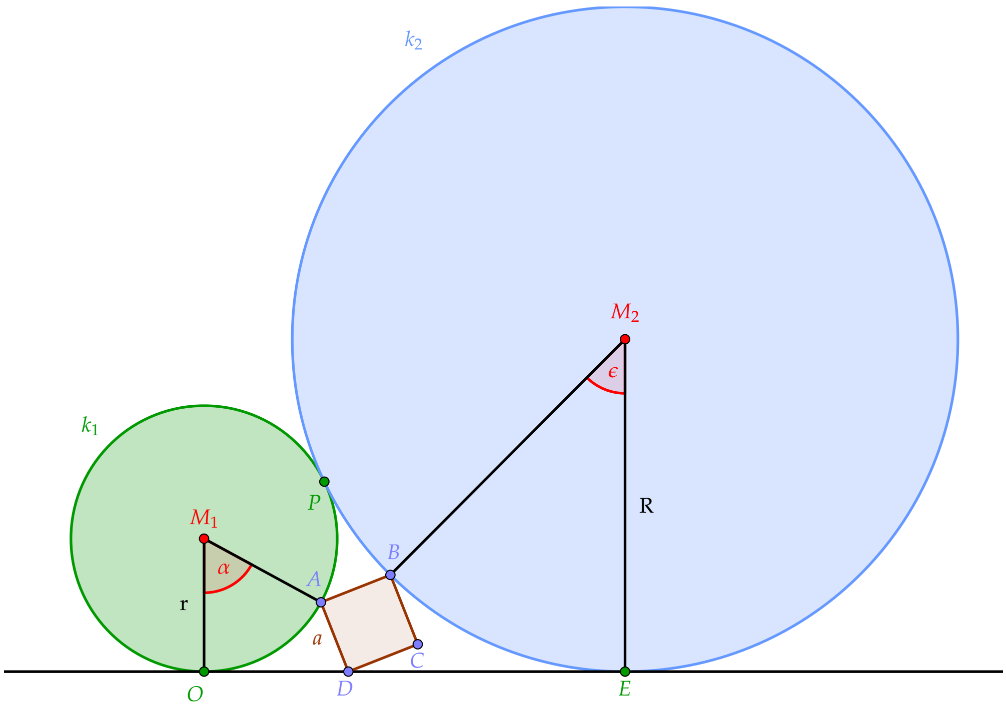
$$a_{min} = 0{,}38539836298327001991.$$

Andreas Grieser fand sogar eine Beziehung zwischen den Winkeln α, ϵ und dem Verhältnis $v = \frac{r}{R}$. Die Gleichung lautet $\quad sin\,\epsilon = v \cdot \left(cos\,\alpha - sin\,\alpha - 1 + \frac{2}{\sqrt{v}}\right)$.

Dann ist $\quad a(\alpha, \epsilon, v) = 2 \cdot R \cdot \sqrt{v^2 \cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 + \left(v \cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right)^2}$.

Man kann beide Gleichungen zusammenführen und die entstandene Gleichung dann nach α ableiten. Diese dann implizit gegebene Extremalbedingung = 0 läßt sich zusammen mit der Ausgangsgleichung (a=) mit dem in Wolfram Mathematica implementierten Resultantenverfahren zu einer einziegen, allgemeingültigen Endformel ausarbeiten. Die allgemeine Gleichung, die für das Verhältnis von $v = \frac{r}{R}$ einen genauen Wert für die minimale Seitenlänge a_{min} des Quadrats liefert, lautet

$$\begin{aligned}
0 = {} & 32 \cdot a^{20} - 8 \cdot (132\sqrt{v^3} + 33v^2 - 114v - 28\sqrt{v} + 61) \cdot a^{18} + (17568\sqrt{v^3} - 22432\sqrt{v^5} + 3360\sqrt{v^7} + 2361v^4 + 5820v^3 + 6766v^2 - \\
& 7796v - 3168\sqrt{v} + 2785) \cdot a^{16} - 4 \cdot (26328\sqrt{v^3} - 42718\sqrt{v^5} + 43420\sqrt{v^7} - 6602\sqrt{v^9} + 5468\sqrt{v^{11}} + 1787v^6 - 8125v^5 - 23974v^4 + \\
& 22965v^3 - 8717v^2 - 3594v - 3704\sqrt{v} + 1726) \cdot a^{14} + 4 \cdot (56912\sqrt{v^3} - 113312\sqrt{v^5} + 82320\sqrt{v^7} - 169180\sqrt{v^9} + 48592\sqrt{v^{11}} - \\
& 83548\sqrt{v^{13}} + 7368\sqrt{v^{15}} + 1541v^8 - 18334v^7 + 46668v^6 + 159986v^5 - 176495v^4 + 248304v^3 - 89552v^2 + 7992v - 5760\sqrt{v} + 1396) \cdot \\
& a^{12} + 16 \cdot (-4176\sqrt{v^3} + 16200\sqrt{v^5} - 3200\sqrt{v^7} + 36088\sqrt{v^9} - 250984\sqrt{v^{11}} + 96464\sqrt{v^{13}} - 110888\sqrt{v^{15}} + 24568\sqrt{v^{17}} + 1096\sqrt{v^{19}} + \\
& 34v^{10} + 9384v^9 - 22445v^8 + 81856v^7 + 105366v^6 - 61554v^5 + 174326v^4 - 141612v^3 + 37940v^2 - 6352v - 160\sqrt{v} + 112) \cdot a^{10} + 64 \cdot \\
& (-800\sqrt{v^3} + 3168\sqrt{v^5} - 5008\sqrt{v^7} + 12292\sqrt{v^9} + 36060\sqrt{v^{11}} - 145288\sqrt{v^{13}} + 26432\sqrt{v^{15}} - 42900\sqrt{v^{17}} + 6212\sqrt{v^{19}} + 2748\sqrt{v^{21}} + \\
& 32\sqrt{v^{23}} + v^{12} + 418v^{11} + 8870v^{10} - 36334v^9 + 103336v^8 + 35840v^7 + 15092v^6 + 71268v^5 - 69207v^4 + 28920v^3 - 4736v^2 + 576v + \\
& 192\sqrt{v} + 16) \cdot a^8 - 256 \cdot v^2 \cdot (-1280\sqrt{v^3} + 3928\sqrt{v^5} - 5284\sqrt{v^7} - 10588\sqrt{v^9} + 60212\sqrt{v^{11}} + 22888\sqrt{v^{13}} - 872\sqrt{v^{15}} + 7816\sqrt{v^{17}} + \\
& 140\sqrt{v^{19}} + 5v^{10} + 1536v^9 + 16644v^8 - 33924v^7 - 8288v^6 - 16184v^5 - 8254v^4 + 23088v^3 - 7516v^2 + 1568v + 544\sqrt{v} + 48) \cdot a^6 + 1024 \cdot \\
& v^4 \cdot (-744\sqrt{v^3} + 2360\sqrt{v^5} + 2256\sqrt{v^7} - 10772\sqrt{v^9} - 5900\sqrt{v^{11}} + 6648\sqrt{v^{13}} + 216\sqrt{v^{15}} + 9v^8 + 1906v^7 + 6197v^6 + 7284v^5 + 9807v^4 + \\
& 1640v^3 - 2720v^2 + 1408v + 544\sqrt{v} + 52) \cdot a^4 - 4096 \cdot v^6 \cdot (-384\sqrt{v^3} + 488\sqrt{v^5} + 1940\sqrt{v^7} + 1524\sqrt{v^9} + 140\sqrt{v^{11}} + 7v^6 + 924v^5 - \\
& 752v^4 - 1256v^3 + 216v^2 + 448v + 224\sqrt{v} + 24) \cdot a^2 + 32768 \cdot v^8 \cdot (-60\sqrt{v^3} - 60\sqrt{v^5} + 16\sqrt{v^7} + v^4 + 68v^3 + 54v^2 + 16v + 16\sqrt{v} + 2).
\end{aligned}$$



Ein Beispiel: $r = 2$, $R = 5$, $v = \frac{2}{5}$, $\quad \epsilon = 44{,}8351°$, $\quad \alpha = 61{,}4133°$, $\quad a_{min} = 1{,}1212$.