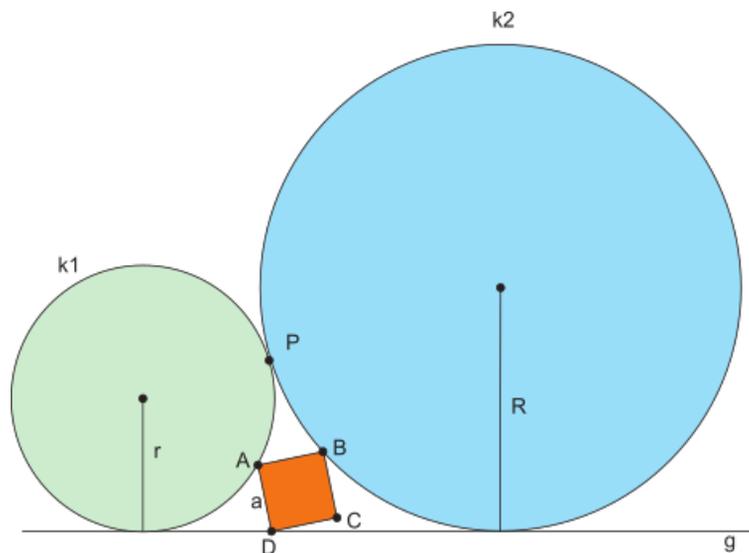


Quadrat unter zwei Kreisen

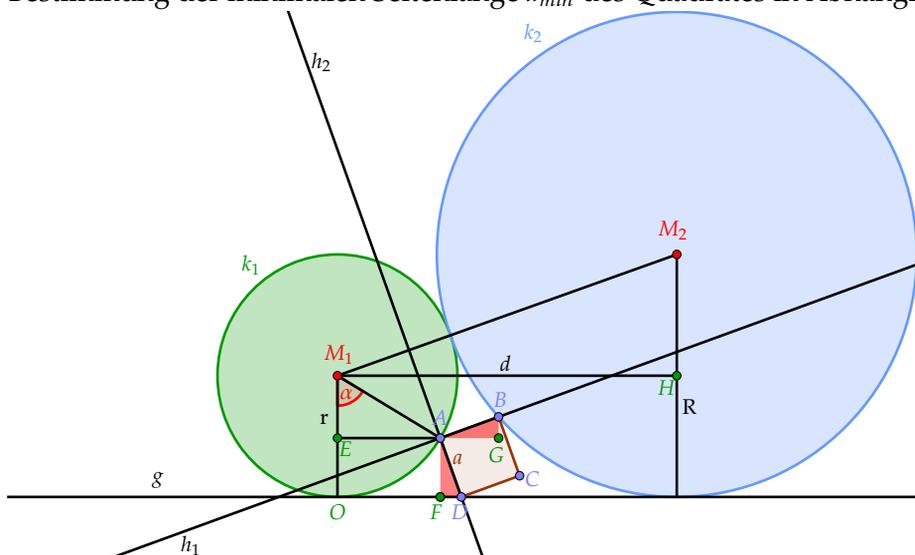
Gegeben sind die Kreise k_1 mit dem Radius r und k_2 mit dem Radius R . Beide Kreise haben die gemeinsame Tangente g und berühren sich untereinander im Punkt P . Ein Quadrat $\square ABCD$ mit der Seitenlänge a ist dem Raum zwischen den beiden Kreisen und der Tangente g eingeschrieben, so dass der Punkt A auf k_1 liegt, der Punkt B auf k_2 und der Punkt D auf g . Welche Seitenlänge hat ein Quadrat mit maximaler und ein Quadrat mit minimaler Seitenlänge, das auf die beschriebene Art zwischen den beiden Kreisen und Geraden g liegt? Die Ecke C darf nicht unterhalb von g liegen.

Aufgabe von Hidetoshi Fukagawa „Das optimale Quadrat zwischen zwei Kreisen“, Japanese Temple Geometry



Lösung

a) Bestimmung der minimalen Seitenlänge a_{min} des Quadrates in Abhängigkeit r , R und α



Der horizontale Abstand $\overline{M_1H} = d$ beider Mittelpunkte M_1 und M_2 kann bestimmt werden.

Er beträgt $(R+r)^2 = d^2 + (R-r)^2$, $d = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}$... (1).

Der Punkt O wird in den Koordinatenursprung gelegt und die y -Koordinate des Punktes A befindet sich auf dem Kreis k_1 zwischen 0 und der y -Koordinate von M_1 . Die Dreiecke $\triangle AFD$ und $\triangle AGB$ sind stets zueinander kongruent.

Dann ist $y_A = x_B - x_A$... (2)

Punkt $A \in k_1$ $x_A^2 + (y_A - r)^2 = r^2$, $x_A^2 + y_A^2 - 2 \cdot y_A \cdot r = 0$... (3)

Punkt $B \in k_2$ $(x_B - 2 \cdot \sqrt{R \cdot r})^2 + (y_B - R)^2 = R^2$, $(x_B - 2 \cdot \sqrt{R \cdot r})^2 = 2 \cdot y_B \cdot R - y_B^2$

positive Lsg. entfällt $y_B = R - \sqrt{R^2 - (x_B - 2 \cdot \sqrt{Rr})^2}$... (4)

Steigung von h_1 $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ mit (4) $m = \frac{y_B - y_A}{y_A}$... (5)

(4) in (5), es entsteht $m = \frac{R - \sqrt{R^2 - (x_B - 2 \cdot \sqrt{Rr})^2} - y_A}{y_A}$, $m = \frac{R - y_A - \sqrt{R^2 - x_B^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot x_B - 4 \cdot r \cdot R}}{y_A}$,

mit (2) $m = \frac{R - y_A - \sqrt{R^2 - (x_A + y_A)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R}}{y_A}$... (6)

Der Punkt D ist der Schnittpunkt der Geraden h_2 mit der Tangente g auf der x-Achse.

Gerade h_2 mit $h_2 \perp h_1$ $y - y_A = -\frac{1}{m} \cdot (x - x_A)$,
mit $y = 0$ $x_D = m \cdot y_A + x_A$ $D(m \cdot y_A + x_A | 0)$ (7)

Die Seitenlänge $a = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2}$ des Quadrats kann berechnet werden.

Dann ist mit (7) $a = \sqrt{(-m \cdot y_A)^2 + (y_A - 0)^2}$, $a = y_A \cdot \sqrt{1 + m^2}$, ... (8)

und (6) $a = y_A \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{R - y_A - \sqrt{R^2 - (x_A + y_A)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R}}{y_A} \right)^2}$,

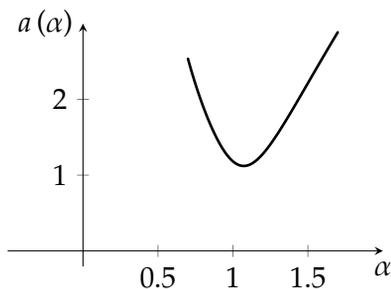
vereinfacht $a = \sqrt{y_A^2 + \left(R - y_A - \sqrt{R^2 - (x_A + y_A)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R} \right)^2}$.

Die Seitenlänge des Quadrats ist abhängig von x_A und y_A .

Im $\triangle EAM_1$ ist $x_A = r \cdot \sin \alpha$ und $y_A = r \cdot (1 - \cos \alpha)$... (9)

(9) wird in a eingesetzt, so dass a nur noch vom Winkel α abhängt. Die Funktion $a(\alpha)$ lautet

$$a = \sqrt{r^2 \cdot (1 - \cos \alpha)^2 + \left(R - r \cdot (1 - \cos \alpha) - \sqrt{R^2 - r^2 \cdot (1 - \cos \alpha + \sin \alpha)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha + \sin \alpha) - 4 \cdot r \cdot R} \right)^2}$$

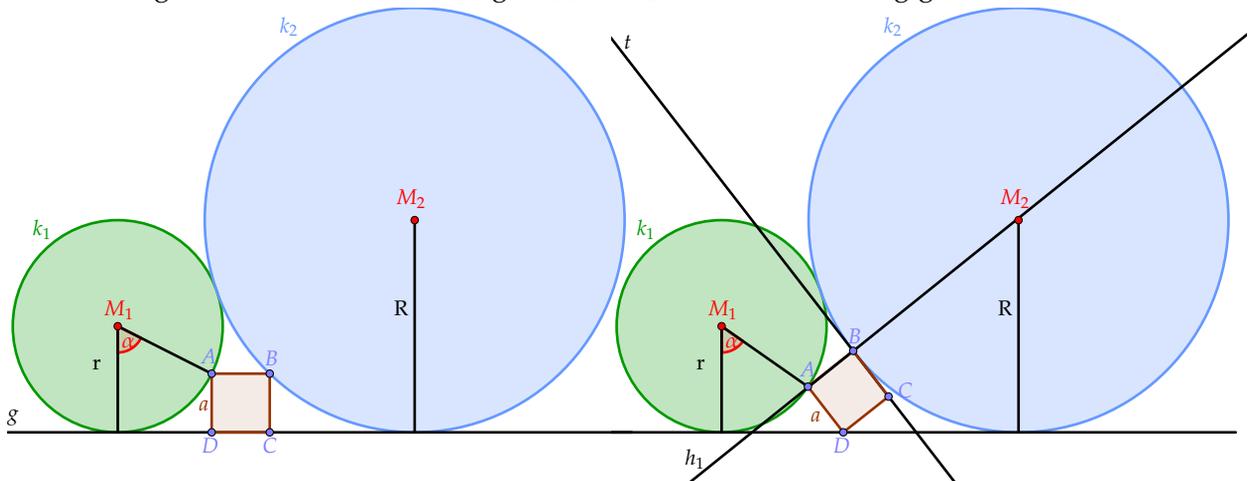


Einige Werte:

r in cm	R in cm	α in °	a_{min} in cm
2,0	2,0	51,1867	0,7708
2,0	3,0	55,8575	0,9206
2,0	4,0	59,0420	1,0324
2,0	5,0	61,4133	1,1212
2,0	6,0	63,2768	1,1946

Die lokale Extremstelle der Funktion $a(\alpha) = a_{min}$ gibt den Winkel im Bogenmaß für die kleinste Seitenlänge des Quadrates in Abhängigkeit beider Radien an.

b) Bestimmung der maximalen Seitenlänge a_{max} des Quadrates in Abhängigkeit von r , R und α



Es sind zwei Grenzfälle zu betrachten.

1. Der Punkt B liegt auf gleicher Höhe mit dem Punkt A .
2. Die Punkte B und C liegen auf einer Tangente t an den Kreis k_2 .

Betrachtung von Fall 1

Die Steigung der Geraden h_1 durch die Punkte A und B ist $m = 0$.

(6) wird zu

$$0 = \frac{R - y_A - \sqrt{R^2 - (x_A + y_A)^2} + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R}{y_A},$$

$$(y_A - R)^2 = R^2 - (x_A + y_A)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R,$$

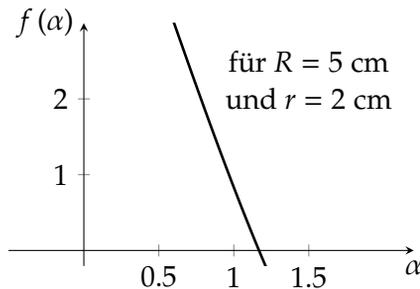
$$0 = 2 \cdot y_A \cdot R - y_A^2 - (x_A + y_A)^2 + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R,$$

$$(x_A + y_A)_{1,2} = 2 \cdot \sqrt{r \cdot R} \pm \sqrt{y_A \cdot (2 \cdot R - y_A)},$$

pos. Lösung entfällt mit (9)

$$0 = 2 \cdot \sqrt{r \cdot R} - \frac{\sqrt{y_A \cdot (2 \cdot R - y_A)} - x_A - y_A}{\sqrt{r \cdot (1 - \cos \alpha)} \cdot (2 \cdot R - r \cdot (1 - \cos \alpha))} - r \cdot (\sin \alpha + 1 - \cos \alpha) \quad \dots(10).$$

(10) beschreibt eine Funktion $f(\alpha)$, deren Nullstelle gesucht wird.



Die Nullstelle von $f(\alpha)$ liegt bei $\alpha = 1,16807$, was im Gradmaß $\alpha = 66,9257^\circ$ sind. Dies ergibt einen Funktionswert in $a(\alpha)$ von $a(66,9257^\circ) = 1,21615$. Die Seitenlänge des Quadrats im Fall 1 für $R = 5$ cm und $r = 2$ cm beträgt $a = 1,21615$ cm.

Betrachtung von Fall 2

Die Gerade h_1 durch die Punkte A und B verläuft durch M_2 , so dass für die Steigung gilt

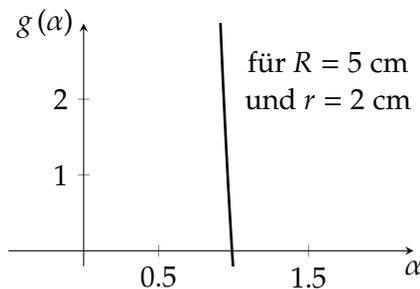
$$m = \frac{y_A - y_{M_2}}{x_A - x_{M_2}}, \quad m = \frac{y_A - R}{x_A - 2 \cdot \sqrt{r \cdot R}}$$

$$m \cdot (x_A - 2 \cdot \sqrt{r \cdot R}) = y_A - R,$$

mit (6)

$$\left(\frac{R - y_A - \sqrt{R^2 - (x_A + y_A)^2} + 4 \cdot \sqrt{r \cdot R} \cdot (x_A + y_A) - 4 \cdot r \cdot R}{y_A} \right) \cdot (x_A - 2 \cdot \sqrt{r \cdot R}) - y_A + R = 0 \quad \dots(11).$$

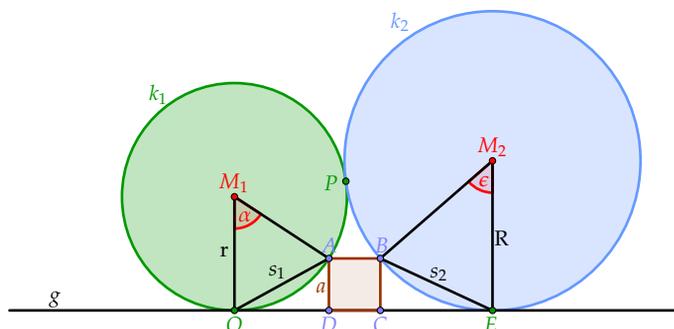
(11) beschreibt eine Funktion $g(\alpha)$, deren Nullstelle gesucht wird.



Die Nullstelle von $g(\alpha)$ liegt bei $\alpha = 0,9892$, was im Gradmaß $\alpha = 56,6775^\circ$ sind. Dies ergibt einen Funktionswert in $a(\alpha)$ von $a(56,6775^\circ) = 1,2011$. Die Seitenlänge des Quadrats im Fall 2 für $R = 5$ cm und $r = 2$ cm beträgt $a = 1,2011$ cm.

Die Nullstellen von $f(\alpha)$ haben immer einen größeren Wert als die von $g(\alpha)$, so dass die Seitenlänge des Quadrats im Fall 1 stets den maximalen Wert annimmt.

c) Bestimmung der Seitenlänge des maximalen Quadrats a_{max} nur in Abhängigkeit von r, R



Die Länge der Sehne s_1 im Kreis k_1 kann bestimmt werden mit der Gleichung

$$s_1 = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

mit $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}}$ $s_1 = 2 \cdot r \cdot \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}},$

mit (9), $y_A = a$ $s_1 = 2 \cdot r \cdot \sqrt{\frac{a}{2 \cdot r}},$ $s_1 = \sqrt{2 \cdot a \cdot r}$... (12).

Analog kann die Länge der Sehne s_2 im Kreis k_2 ermittelt werden.

Sie hat eine Länge von $s_2 = \sqrt{2 \cdot a \cdot R}$... (13).

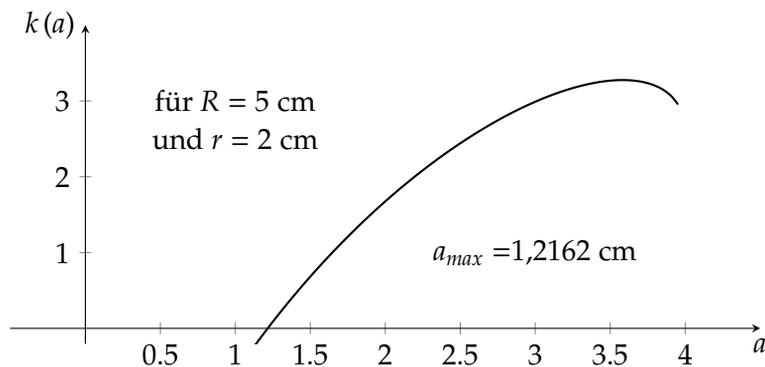
Dann ist $\overline{OE} = \overline{OD} + a + \overline{CE},$ $\overline{OE} = \sqrt{s_1^2 - a^2} + a + \sqrt{s_2^2 - a^2},$

mit (1), (12), (13) $2 \cdot \sqrt{r \cdot R} = \sqrt{2 \cdot a \cdot r - a^2} + a + \sqrt{2 \cdot a \cdot R - a^2}$... (14).

Die Nullstelle der Funktion

$$k(a) = \sqrt{a \cdot (2 \cdot r - a)} + a + \sqrt{a \cdot (2 \cdot R - a)} - 2 \cdot \sqrt{r \cdot R}$$

liefert wegen (14) die maximale Seitenlänge des Quadrats.



Eine Grenzwertbetrachtung bietet sich an.

Mit $r = 1$ und (14) ist $2 \cdot \sqrt{R} = \sqrt{a \cdot (2 - a)} + a + \sqrt{a \cdot (2 \cdot R - a)},$

nach R umgestellt $R = \frac{a^3 + 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{a \cdot (2 - a)} + 4 \cdot a \cdot (1 + \sqrt{a \cdot (2 - a)}) + 4 \cdot \sqrt{a^3 \cdot (2 \cdot \sqrt{a \cdot (2 - a)} + a \cdot (5 + \sqrt{a \cdot (2 - a)}) - 2 \cdot a^2)}}{2 \cdot (a - 2)^2},$... (15)

mit $r = 2$ $R = \frac{a^3 + 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{a \cdot (4 - a)} + 8 \cdot a \cdot (2 + \sqrt{a \cdot (4 - a)}) + 4 \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{a \cdot (4 \cdot \sqrt{a \cdot (4 - a)} + a \cdot (10 + \sqrt{a \cdot (4 - a)}) - 2 \cdot a^2)}}{2 \cdot (a - 4)^2}$... (16).

Der Nenner strebt in (15) für $a \rightarrow 2$ gegen Null, der Zähler ist beschränkt und strebt gegen 32.

In (16) strebt der Nenner für $a \rightarrow 4$ gegen Null, der Zähler ist beschränkt und strebt gegen 200.

In diesen beiden Fällen und in allen Fällen, wo r fest ist und der Nenner mit einem festen a gegen Null strebt, strebt R gegen unendlich. Damit ist a der Grenzwert für das maximale Quadrat.

Dies bedeutet $\lim_{R \rightarrow \infty} a_{max} = \lim_{R \rightarrow \infty} (\sqrt{a \cdot (2 \cdot r - a)} + a + \sqrt{a \cdot (2 \cdot R - a)} - 2 \cdot \sqrt{r \cdot R}),$
 $\lim_{R \rightarrow \infty} a_{max} = 2 \cdot r.$

d) Vergleich einiger Seitenlängen bei gegebenen Radien

r in cm	R in cm	a_{min} in cm	a_{max} in cm
2,0	2,0	0,7708	0,8000
2,0	3,0	0,9206	0,9723
2,0	4,0	1,0324	1,1062
2,0	5,0	1,1212	1,2162
2,0	6,0	1,1946	1,3095

e) Bestimmung der Seitenlänge des minimalen Quadrats a_{min} nur in Abhängigkeit von r, R

Dr. Eugen Willerding hat eine biquadratische Gleichung 14. Grades gefunden, die für $R = 1$ und $r = 1$ die minimale Länge der Quadratseite angibt.

Sie lautet $0 = -3392 + 25376 \cdot a^2 - 17436 \cdot a^4 + 2253 \cdot a^6 + 282 \cdot a^8 + 42 \cdot a^{10} - 28 \cdot a^{12} + 4 \cdot a^{14}$.

Wolfram Mathematica kann die Gleichung nach a auflösen und liefert den Wert

$$a_{min} = 0,38539836298327001991.$$

Andreas Grieser hat eine Beziehung zwischen den Winkeln α, ϵ und dem Verhältnis $v = \frac{r}{R}$

gefunden. Die Gleichung lautet $\sin \epsilon = v \cdot \left(\cos \alpha - \sin \alpha - 1 + \frac{2}{\sqrt{v}} \right)$.

Dann ist
$$a(\alpha, \epsilon, v) = 2 \cdot R \cdot \sqrt{v^2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 + \left(v \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right)^2}$$

Man kann beide Gleichungen zusammenführen und die entstandene Gleichung dann nach α ableiten. Diese dann implizit gegebene Extremalbedingung = 0 läßt sich zusammen mit der Ausgangsgleichung ($a =$) mit dem in Wolfram Mathematica implementierten Resultantenverfahren zu einer einziigen, allgemeingültigen Endformel ausarbeiten. Die allgemeine Gleichung, die für das Verhältnis von $v = \frac{r}{R}$ einen genauen Wert für die minimale Seitenlänge a_{min} des Quadrats liefert, lautet

$$0 = 32 \cdot a^{20} - 8 \cdot (132 \sqrt{v^3} + 33v^2 - 114v - 28 \sqrt{v} + 61) \cdot a^{18} + (17568 \sqrt{v^3} - 22432 \sqrt{v^5} + 3360 \sqrt{v^7} + 2361v^4 + 5820v^3 + 6766v^2 - 7796v - 3168 \sqrt{v} + 2785) \cdot a^{16} - 4 \cdot (26328 \sqrt{v^3} - 42718 \sqrt{v^5} + 43420 \sqrt{v^7} - 6602 \sqrt{v^9} + 5468 \sqrt{v^{11}} + 1787v^6 - 8125v^5 - 23974v^4 + 22965v^3 - 8717v^2 - 3594v - 3704 \sqrt{v} + 1726) \cdot a^{14} + 4 \cdot (56912 \sqrt{v^3} - 113312 \sqrt{v^5} + 82320 \sqrt{v^7} - 169180 \sqrt{v^9} + 48592 \sqrt{v^{11}} - 83548 \sqrt{v^{13}} + 7368 \sqrt{v^{15}} + 1541v^8 - 18334v^7 + 46668v^6 + 159986v^5 - 176495v^4 + 248304v^3 - 89552v^2 + 7992v - 5760 \sqrt{v} + 1396) \cdot a^{12} + 16 \cdot (-4176 \sqrt{v^3} + 16200 \sqrt{v^5} - 3200 \sqrt{v^7} + 36088 \sqrt{v^9} - 250984 \sqrt{v^{11}} + 96464 \sqrt{v^{13}} - 110888 \sqrt{v^{15}} + 24568 \sqrt{v^{17}} + 1096 \sqrt{v^{19}} + 34v^{10} + 9384v^9 - 22445v^8 + 81856v^7 + 105366v^6 - 61554v^5 + 174326v^4 - 141612v^3 + 37940v^2 - 6352v - 160 \sqrt{v} + 112) \cdot a^{10} + 64 \cdot (-800 \sqrt{v^3} + 3168 \sqrt{v^5} - 5008 \sqrt{v^7} + 12292 \sqrt{v^9} + 36060 \sqrt{v^{11}} - 145288 \sqrt{v^{13}} + 26432 \sqrt{v^{15}} - 42900 \sqrt{v^{17}} + 6212 \sqrt{v^{19}} + 2748 \sqrt{v^{21}} + 32 \sqrt{v^{23}} + v^{12} + 418v^{11} + 8870v^{10} - 36334v^9 + 103336v^8 + 35840v^7 + 15092v^6 + 71268v^5 - 69207v^4 + 28920v^3 - 4736v^2 + 576v + 192 \sqrt{v} + 16) \cdot a^8 - 256 \cdot v^2 \cdot (-1280 \sqrt{v^3} + 3928 \sqrt{v^5} - 5284 \sqrt{v^7} - 10588 \sqrt{v^9} + 60212 \sqrt{v^{11}} + 22888 \sqrt{v^{13}} - 872 \sqrt{v^{15}} + 7816 \sqrt{v^{17}} + 140 \sqrt{v^{19}} + 5v^{10} + 1536v^9 + 16644v^8 - 33924v^7 - 8288v^6 - 16184v^5 - 8254v^4 + 23088v^3 - 7516v^2 + 1568v + 544 \sqrt{v} + 48) \cdot a^6 + 1024 \cdot v^4 \cdot (-744 \sqrt{v^3} + 2360 \sqrt{v^5} + 2256 \sqrt{v^7} - 10772 \sqrt{v^9} - 5900 \sqrt{v^{11}} + 6648 \sqrt{v^{13}} + 216 \sqrt{v^{15}} + 9v^8 + 1906v^7 + 6197v^6 + 7284v^5 + 9807v^4 + 1640v^3 - 2720v^2 + 1408v + 544 \sqrt{v} + 52) \cdot a^4 - 4096 \cdot v^6 \cdot (-384 \sqrt{v^3} + 488 \sqrt{v^5} + 1940 \sqrt{v^7} + 1524 \sqrt{v^9} + 140 \sqrt{v^{11}} + 7v^6 + 924v^5 - 752v^4 - 1256v^3 + 216v^2 + 448v + 224 \sqrt{v} + 24) \cdot a^2 + 32768 \cdot v^8 \cdot (-60 \sqrt{v^3} - 60 \sqrt{v^5} + 16 \sqrt{v^7} + v^4 + 68v^3 + 54v^2 + 16v + 16 \sqrt{v} + 2).$$

Ein großes Dankeschön an Ingmar Rubin, Berlin, und Andreas Grieser, Greifswald, die mir mit ihren Ideen hilfreich zur Seite standen.