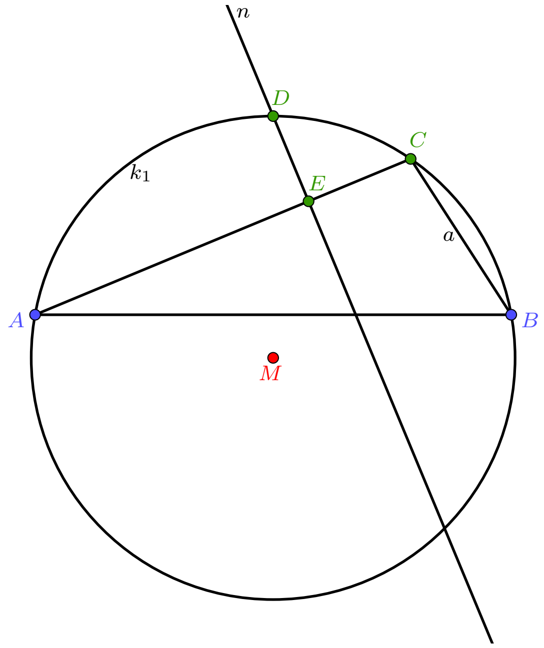
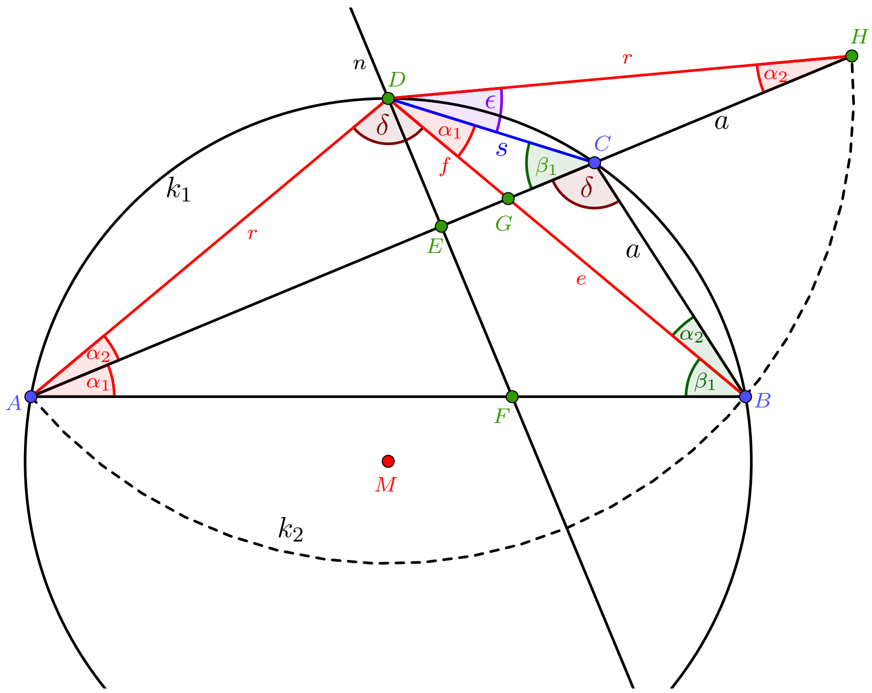
Normale auf Kreissehne

Die Punkte A, B und C liegen auf einem Kreis k_1. Es sei $\overline{AC} > \overline{BC}$ und der Punkt D der Halbierungspunkt des Bogens $\widehat{AB}$. Fällt man von D aus eine Normale n auf die Seite $\overline{AC}$, so schneidet diese $\overline{AC}$ in E.
Es ist zu zeigen, dass $\overline{AE} = \frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{2}$.



Aufgabe vom arabischen Mathematiker Al-Biruni (973-1048)

Lösung



Zeichnet man einen Halbkreis k_2 mit dem Mittelpunkt D und dem Radius $r = e + f$ von A über B nach H, so ist H der Schnittpunkt der Verlängerung der Seite $b = \overline{AC}$ mit dem Kreis k_2.
Die Dreiecke ΔAED und ΔEHD sind zueinander kongruent, da beide Dreiecke jeweils zwei gleich lange Seiten mit r und $\overline{DE}$ haben, die Basiswinkel α_2 vom Dreieck ΔAHD und den rechten Winkel von der Normalen, es ist $\Delta AED \cong \Delta EHD$.
Dann ist der Punkt E der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AH}$.
Bleibt noch zu zeigen, dass die Seite $a = \overline{BC}$ kongruent zur Seite $a = \overline{CH}$ ist.
Dann müssen die Dreiecke ΔBCD und ΔDCH zueinander kongruent sein.
Der Beweis wird nun geführt:
Die Summe der gegenüberliegenden Winkel in einem Sehnenviereck beträgt $180°$,
so dass (bei den Punkten A und C) die Beziehung gilt $\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \delta = 180° \quad$ ...(1).
Die Winkel $\sphericalangle BDA = \delta$ und $\sphericalangle BCA = \delta$ sind Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{AB}$.
Im Dreieck ΔAHD ist $\epsilon = 180° - \delta - \alpha_1 - 2 \cdot \alpha_2$,
mit (1) $\quad \epsilon = 180° - (180° - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1) - \alpha_1 - 2 \cdot \alpha_2, \quad \epsilon = \beta_1 - \alpha_2 \quad$ ...(2).
Da im gleichschenkligen Dreieck ΔABD $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ wird (2) zu $\quad \epsilon = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2$,
$\epsilon = \alpha_1$. ...(3)
Der Kongruenzsatz *wsw* kann genutzt werden. Die jeweils kongruenten Winkel in den Dreiecken ΔBCD und ΔDCH sind α_2 und mit (3) α_1. Die jeweils von den Winkeln eingeschlossene, gleich lange Seite $r = e + f$ ist der Radius des Kreises k_2.
Damit ist die Seite a der Radius eines Kreisbogen k_3 mit dem Mittelpunkt C auf dem die Punkte B und H liegen. Der Punkt B kann auf H gedreht werden.
Die Linie s ist eine Winkelhalbierende im gleichschenkligen Dreieck ΔBHD.