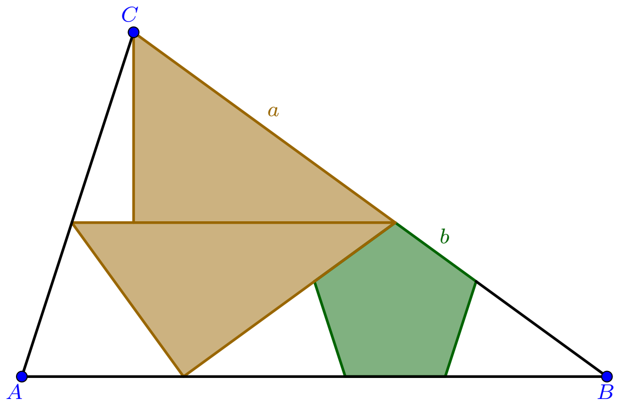
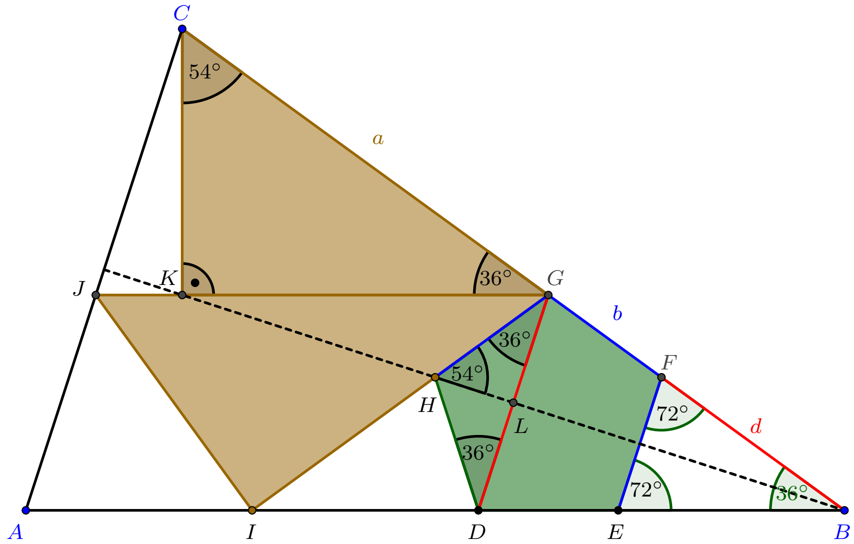
Pentagon im Dreieck

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC. Die grüne Figur ist ein Pentagon und die holzfarbenen, rechtwinkligen Dreiecke sind zueinander kongruent.
Welches Verhältnis bilden die Hypotenuse a des Dreiecks und die Seitenlänge b des Pentagons?



Aufgabe von Gianni Sarcone, archimedes-lab.org, Sonntagspuzzle Nr.69 vom 2.November 2014

Lösung



Einige Voraussetzungen:

Größe eines Innenwinkels vom Pentgon	$\alpha = 108°$	
Das Dreieck ΔEBF ist gleichschenklig.	Nebenwinkel von je $\alpha = 72°$	
Winkel β bei B	$\beta = 36°$	
Das Dreieck ΔIBG ist gleichschenklig.	$2 \cdot 36° + 108° = 180°$	...(1)
$\overline{DG} \perp$ zur Winkelhalbierenden von β		
Die Dreiecke ΔKGC und ΔHLG sind ähnlich.		...(2)

Die Dreiecke ΔEBF und ΔDGH sind Goldene Dreiecke. Das heisst, in gleichschenkligen Dreiecken, wo die Basiswinkel 72°und der Winkel an der Spitze 36° betragen oder die Basiswinkel 36° und der Winkel an der Spitze 108°, verhalten sich zwei unterschiedliche Seiten wie Major zu Minor beim Goldenen Schnitt, so dass in beiden Dreiecken gilt:

$$\frac{d}{b} = \Phi \qquad \text{...(3)}$$

Zur Lösung der Aufgabe:

Aus (2) entsteht	$\frac{a}{\overline{KG}} = \frac{b}{\overline{GL}}$	
$\overline{KG} = \overline{IG}$, $\overline{GL} = \frac{1}{2} \cdot d$	$\frac{a}{\overline{IG}} = \frac{2 \cdot b}{d}$	
mit (1) und $\overline{IG} = b + d$	$a \cdot d = 2 \cdot b \cdot (b + d)$	
mit (3) und $d = \Phi \cdot b$	$a \cdot \Phi \cdot b = 2 \cdot b \cdot (b + \Phi \cdot b)$	$a \cdot \Phi = 2 \cdot b \cdot (1 + \Phi)$
	$\frac{a}{b} = \frac{2}{\Phi} \cdot (1 + \Phi)$	
mit $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{a}{b} = \frac{4}{\sqrt{5}+1} + 2$	$\frac{a}{b} = \frac{4+2\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{\sqrt{5}+1}$
erweitern	$\frac{a}{b} = \frac{6+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{a}{b} = \frac{4\cdot\sqrt{5}+4}{4}$
	$\frac{a}{b} = \sqrt{5} + 1$	$\underline{\underline{\frac{a}{b} = 2 \cdot \Phi}}$

Die Hypotenuse a des rechtwinkligen Dreiecks und die Seite b des Pentagons stehen in einem Verhältnis von rund 3,24 : 1.

> *"Die Geometrie birgt zwei große Schätze: Der Eine ist der Satz des Pythagoras, der Andere der goldene Schnitt. Den Ersten können wir mit einem Scheffel Gold vergleichen, den Zweiten als ein kostbares Juwel bezeichnen."*
>
> Johannes Kepler (1571-1630)