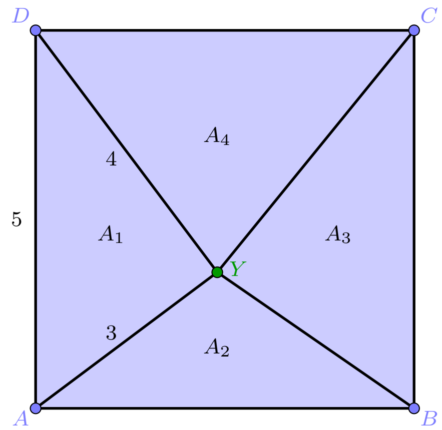
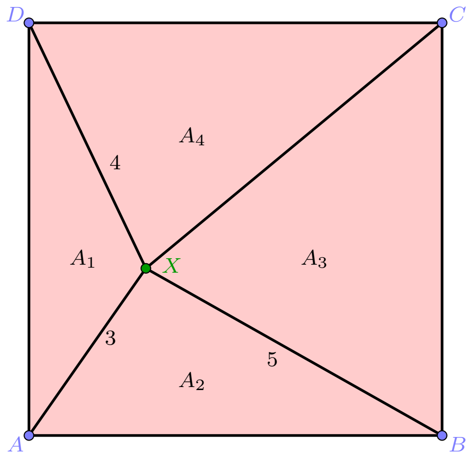
Flächen im Quadrat bestimmen

Ein Punkt liegt im Quadrat $\square ABCD$.

a) Wie groß sind die Flächeninhalte der vier Dreiecke in dem blauen Quadrat?



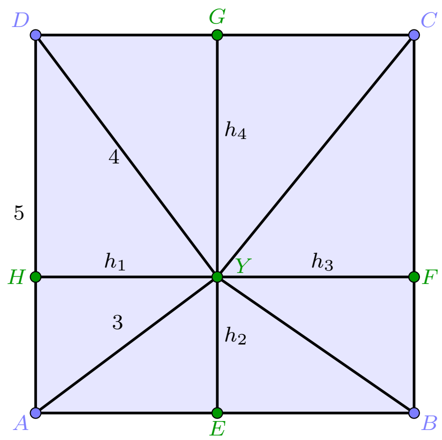
b) Wie groß sind die Flächeninhalte der vier Dreiecke in dem roten Quadrat?



Aufgabe der Woche 662, Serie 56, von Thomas Jahre, Chemnitzer Schulmodell, Januar 2021

Lösung

a) Die Höhen der vier Dreiecke werden eingezeichnet. Das Dreieck ΔAYD ist rechtwinklig, da die Umkehrung des Satzes von Pythagoras gilt: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Aus der Flächengleichheit von A_1 entsteht



$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h_1,$ $\quad h_1 = 2{,}4$ ...(1),

mit (1) $\quad h_3 = 5 - h_1,$ $\quad h_3 = 2{,}6$ ...(2).

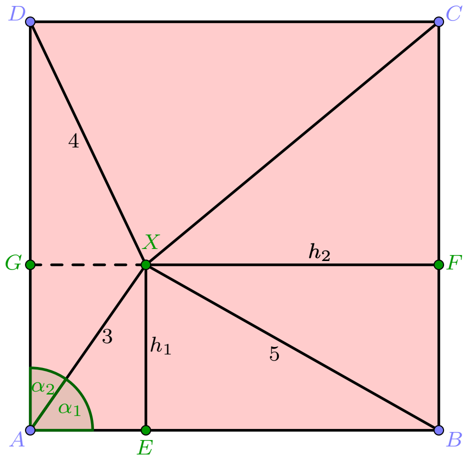
Nach Euklid ist $\overline{HD} = \frac{4^2}{5}$ $\quad h_4 = \overline{HD},$ $\quad h_4 = 3{,}2$ ...(3),

mit (3) $\quad h_2 = 5 - h_3,$ $\quad h_3 = 1{,}8$ ...(4).

Die Flächeninhalte sind $\quad \underline{\underline{A_1 = 6{,}0\ cm^2}},$ $\quad \underline{\underline{A_2 = 4{,}5\ cm^2}},$

$\underline{\underline{A_3 = 6{,}5\ cm^2}},$ $\quad \underline{\underline{A_4 = 8{,}0\ cm^2}}.$

b) Die Höhen h_1 und h_2 werden eingezeichnet.



Im Dreieck ΔAEX ist $\quad 3^2 = (a - h_2)^2 + h_1^2,$ $\quad 9 = a^2 - 2 \cdot a \cdot h_2 + h_2^2 + h_1^2$ ...(1),

im Dreieck ΔEBX ist $\quad 5^2 = h_1^2 + h_2^2,$ ...(2),

(2) in (1) $\quad 9 = a^2 - 2 \cdot a \cdot h_2 + 25,$ $\quad h_2 = \frac{a^2+16}{2 \cdot a}$ ...(3).

Im Dreieck ΔAXD ist $\quad 4^2 = a^2 + 3^2 - 2 \cdot a \cdot 3 \cdot cos\ \alpha_2,$ ...(4),

im Dreieck ΔAXG ist $\quad cos\ \alpha_2 = \frac{h_1}{3}$ ...(5),

(5) in (4) $\quad 4^2 = a^2 + 3^2 - 2 \cdot a \cdot h_1,$ $\quad h_1 = \frac{a^2-7}{2 \cdot a}$ ...(6).

Im Dreieck ΔEBX ist $\quad 5^2 = h_1^2 + h_2^2$ ...(7),

(3), (6) in (7) $\quad 25 = \left(\frac{a^2-7}{2 \cdot a}\right)^2 + \left(\frac{a^2+16}{2 \cdot a}\right)^2,$

$100 \cdot a^2 = (a^2 - 7)^2 + (a^2 + 16)^2,$

$100 \cdot a^2 = a^4 - 14 \cdot a^2 + 49 + a^4 + 32 \cdot a^2 + 256,$

$2 \cdot a^4 - 82 \cdot a^2 + 305 = 0,$ $\quad a^4 - 41 \cdot a^2 + \frac{305}{2} = 0,$

Substitution $a^2 = z$ $\quad z_{1,2} = \frac{41}{2} \pm \sqrt{\frac{1681}{4} - \frac{610}{4}},$ $\quad z_{1,2} = \frac{41}{2} \pm \frac{3}{2} \cdot \sqrt{119},$

negative Lösung entfällt $\quad a = \sqrt{\frac{41}{2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{119}},$ $\quad \underline{\underline{a \approx 6{,}07150}}.$

Die Flächeninhalte sind $\quad A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (a - h_2),$ $\quad A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(a - \frac{a^2+16}{2 \cdot a}\right),$

$A_1 = \frac{1}{4} \cdot a^2 - 4,$ $\quad A_1 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{41}{2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{119}\right) - 4,$

$A_1 = \frac{3}{8} \cdot \left(3 + \sqrt{119}\right),$ $\quad \underline{\underline{A_1 \approx 5{,}21577\ cm^2}},$

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1,$ $\quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a^2-7}{2 \cdot a},$

$A_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(a^2 - 7\right),$ $\quad A_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{41}{2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{119} - 7\right),$

$A_2 = \frac{3}{8} \cdot \left(9 + \sqrt{119}\right),$ $\quad \underline{\underline{A_2 \approx 7{,}46577\ cm^2}},$

$A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_2,$ $\quad A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a^2+16}{2 \cdot a},$

$A_3 = \frac{1}{4} \cdot a^2 + 4,$ $\quad A_3 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{41}{2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{119}\right) + 4,$

$A_3 = \frac{1}{8} \cdot \left(73 + 3 \cdot \sqrt{119}\right),$ $\quad \underline{\underline{A_3 \approx 13{,}21577\ cm^2}},$

$A_4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (a - h_1),$ $\quad A_4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(a - \frac{a^2-7}{2 \cdot a}\right),$

$A_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(a^2 + 7\right),$ $\quad A_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{41}{2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{119} + 7\right),$

$A_4 = \frac{1}{8} \cdot \left(55 + 3 \cdot \sqrt{119}\right),$ $\quad \underline{\underline{A_4 \approx 10{,}96577\ cm^2}}.$