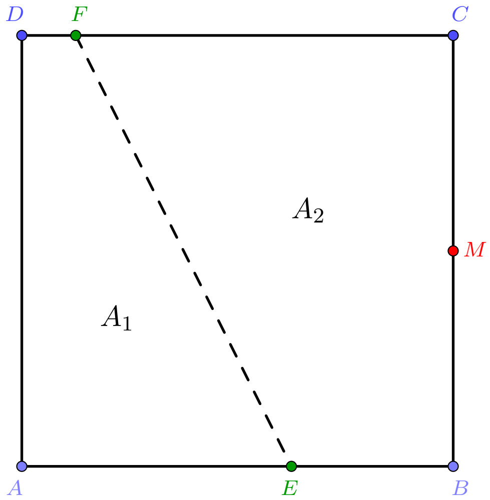
Quadratfaltung

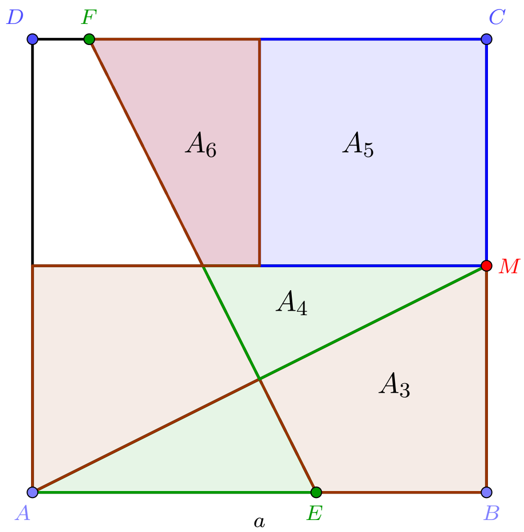
Ein quadratisches Stück Papier $\square ABCD$ wird so gefaltet, dass der Punkt A auf die Stecke $\overline{BC}$ gelegt wird. Nach dem Aufklappen der Faltfigur sind zwei Trapeze $\square AEFD$ und $\square EBCF$ sichtbar.

a) In welchem Verhältnis stehen die Flächen A_1 und A_2, wenn der Punkt A genau auf den Mittelpunkt M der Stecke $\overline{BC}$ gelegt wird?

b) Wo muss der Punkte A auf der Stecke $\overline{BC}$ liegen, damit die Fläche A_2 maximal wird?



Idee der Aufgabe nach „Serviettenvierecke“, Aufgabe No. 46 aus der Rätselsammlung „Euklids Wohnzimmer“ von Heinrich Hemme
erweitert durch Peter G. Nischke, Berlin, vom 30. Juli 2020



Lösung

a) Die Flächen A_3 und A_4 sind halb so groß wie ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge a, so dass

$$A_3 + A_4 = \frac{1}{4} \cdot a^2 \qquad \text{...(1).}$$

Die Fläche A_5 wird so gewählt, dass auch sie halb so groß ist wie ein halbes Quadrat

$$A_5 = \frac{1}{4} \cdot a^2 \qquad \text{...(2).}$$

Die Fläche A_6 ist halb so groß wie die Fläche A_5

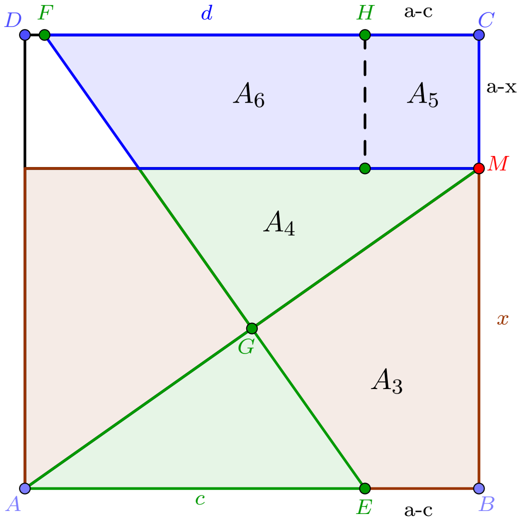
$$A_6 = \frac{1}{8} \cdot a^2 \qquad \text{...(3).}$$

Mit (1), (2) und (3) ist $A_2 = A_3 + A_4 + A_5 + A_6$, $\quad A_2 = \frac{1}{4} \cdot a^2 + \frac{1}{4} \cdot a^2 + \frac{1}{8} \cdot a^2$,

$$\underline{\underline{A_2 = \frac{5}{8} \cdot a^2}}, \qquad \underline{\underline{A_1 = \frac{3}{8} \cdot a^2}}.$$

Das Verhältnis der Flächen beträgt damit $A_1 : A_2 = 3 : 5$.

b) Der Punkt M verschiebt sich auf der Stecke $\overline{BC}$, die Flächen verändern sich. Die Dreiecke ΔABM und ΔEHF sind kongruent nach Kongrenzsatz wsw. Damit ist $d = x$.



A_2 enthält zwei Trapeze $\quad A_2 = (A_3 + A_4) + (A_5 + A_6)$,

$A_2 = \frac{a-c+c}{2} \cdot x + \frac{c+a-c+d}{2} \cdot (a-x), \quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot x + \frac{a+d}{2} \cdot (a-x)$,

mit $d = x$ $\quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot x + \frac{a+x}{2} \cdot (a-x); \quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot x + \frac{1}{2} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot x^2$,

$A_2 = -\frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - a \cdot x - a^2\right)$,

umgeformt $\quad A_2 = -\frac{1}{2} \cdot \left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \cdot a^2\right), \quad A_2 = \frac{5}{8} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$.

Die Fläche A_2 wird dann maximal, wenn $x = \frac{a}{2}$, sie beträgt $A_2 = \frac{5}{8} \cdot a^2$, siehe a).