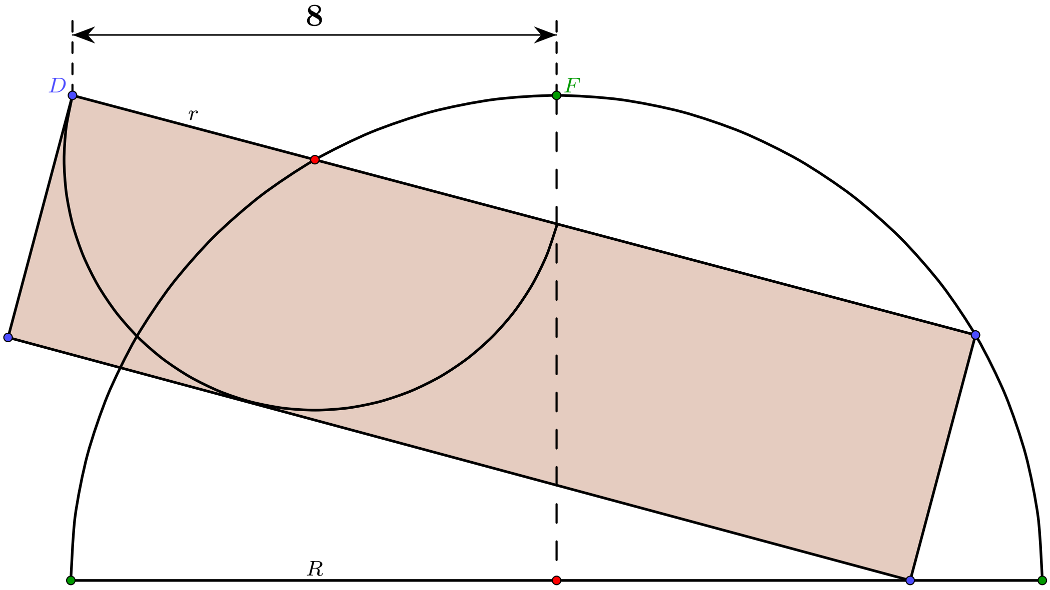
Rechteck und zwei Halbkreise

a) Welche Radien haben die beiden Halbkreise, wenn die Länge der Strecke $\overline{DF} = 8\ LE$ beträgt.

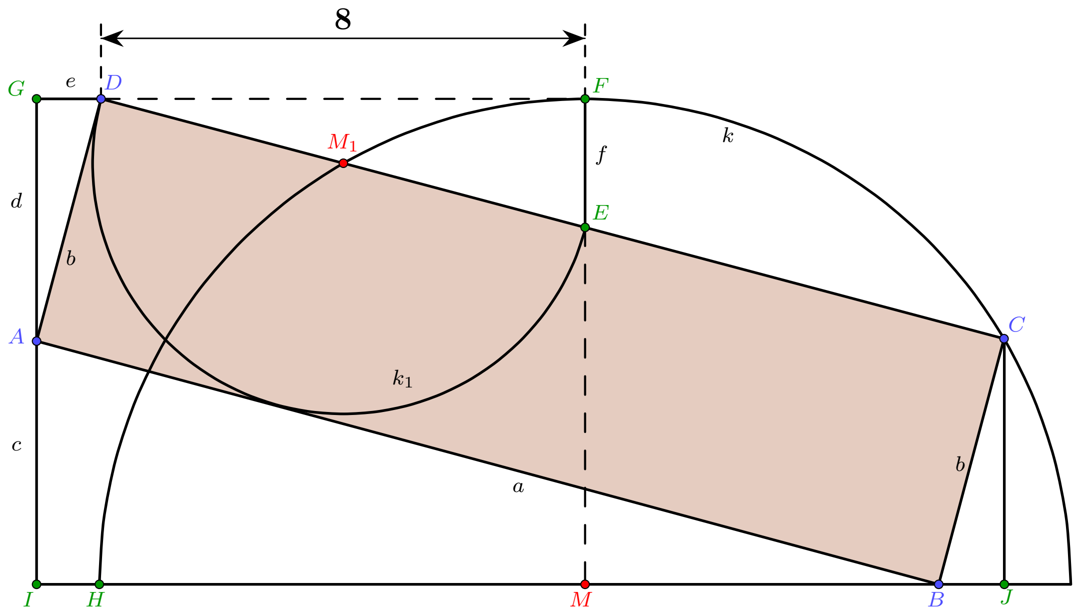
b) Welchen Flächeninhalt besitzt das farbig markierte Rechteck ?



Idee nach einer Aufgabe von Catriona Agg, Twitter Channel: @Cshearer41, erweitert durch Ingmar Rubin, Berlin, vom 7. Februar 2021

Lösung

Die Kreise k und k_1 haben die Radien R und r, die Seiten des Rechtecks sind a und $b = r$.
Weiterhin sind die beiden Dreiecke ΔADG und ΔDEF zueinander ähnlich.
Der Punkt M liegt im Koordinatenursprung, der Kreis k hat die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$.



Mit $\Delta ADG \sim \Delta DEF$ ist	$\frac{b}{d} = \frac{2\cdot r}{8}$,	$d = \frac{4\cdot b}{r}$,	
$b = r$, $d = y_C$	$d = 4$,	$y_C = 4$	...(1).
$C \in k$, mit (1)	$x^2 + 16 = R^2$,	$x_C = \sqrt{R^2 - 16}$,	...(2).
Die Punkte von C, D sind	$C(\sqrt{R^2 - 16} \mid 4)$,	$D(-8 \mid R)$	...(3).

Mit $\Delta ADG \sim \Delta DEF$ ist $\quad \frac{d}{e} = \frac{8}{f}, \quad e = \frac{d \cdot f}{8},$

mit (1) $\quad e = \frac{1}{2} \cdot f \quad$ ...(4).

Damit kann der Mittelpunkt des Kreises k_1 bestimmt werden. Er hat die Koordinaten

mit (4) $\quad M_1(-4 \mid R-e) \quad$ ...(5).

(5) $\in k$, (5) in k $\quad 4^2 + (R-e)^2 = R^2, \quad 16 + R^2 - 2 \cdot e \cdot R + e^2 = R^2,$

$e^2 - 2 \cdot e \cdot R + 16 = 0, \quad e = R - \sqrt{R^2 - 16} \quad$ ...(6).

Die Dreiecke ΔADG und ΔBJC sind kongruent, so dass $\overline{BJ} = e$. Der Punkt B hat die Koordinaten mit (2) $\quad B(x_C - e \mid 0), \quad B(\sqrt{R^2 - 16} - e \mid 0) \quad$ ...(7).

Die Steigungen der Geraden durch die Punkte A und B bzw. D und E sind gleich. Daher ist $m_{\overline{AB}} = m_{\overline{CD}}$, die Substitution $\sqrt{R^2-16} = z$ erleichtert das Rechnen.

So ist mit (4) $\quad \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_D - y_E}{x_D - x_E}, \quad \frac{R-4-0}{-R-e-(z-e)} = \frac{2 \cdot e}{-8-0},$

mit (6) $\quad \frac{R-4}{-R-z} = \frac{R-z}{-4}, \quad 16 - 4 \cdot R = -(R+z) \cdot (R-z),$

Rückführung von z $\quad 16 - 4 \cdot R = z^2 - R^2, \quad 16 - 4 \cdot R = R^2 - 16 - R^2,$

$32 = 4 \cdot R, \quad \underline{\underline{R = 8}} \quad$ ...(8).

Die Gleichung von k_1 lautet $\quad (x+4)^2 + (y-(R-e))^2 = r^2 \quad$ ...(9),

$D \in k_1$, (3) in (9) $\quad (-8+4)^2 + (R-(R-e))^2 = r^2 \quad 16 + e^2 = r^2,$

mit (6) $\quad 16 + (R - \sqrt{R^2-16})^2 = r^2,$

$16 + R^2 - 2 \cdot R \cdot \sqrt{R^2-16} + R^2 - 16 = r^2,$

$2 \cdot R^2 - 2 \cdot R \cdot \sqrt{R^2-16} = r^2,$

mit (8) $\quad 2 \cdot 64 - 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{64-16} = r^2, \quad r^2 = 16 \cdot (8 - \sqrt{48}),$

$r = 8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \quad \underline{\underline{r = R \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}} \quad$ ...(10).

Mit $a = \overline{CD}$ und (3) ist $\quad a = \sqrt{\left(\sqrt{R^2-16} + 8\right)^2 + (4-R)^2},$

mit (8) $\quad a = \sqrt{\left(\sqrt{64-16} + 8\right)^2 + 16},$

$a = \sqrt{48 + 16 \cdot \sqrt{48} + 64 + 16},$

$a = \sqrt{128 + 16 \cdot \sqrt{48}}, \quad a = \sqrt{64 \cdot (2 + \sqrt{3})},$

$a = 8 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \quad \underline{\underline{a = R \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \quad$ ...(11).

Der Flächeninhalt $A = a \cdot b$ des Rechtecks kann bestimmt werden.

Mit $b = r$, (11), (10) $\quad A = 8 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot 8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}},$

$A = 64 \cdot \sqrt{4-3}, \quad A = 64 \quad \underline{\underline{A = R^2\ FE}}.$

Die Radien der Kreise k und k_1 betragen $R = 8\ LE$ und $r = 8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}\ LE$.
Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt $A = 64\ FE$.

Eleganter kann der Flächeninhalt des Rechtecks mit dem Sehnen-Tangenten-Satz bestimmt werden. Danach ist $\quad r \cdot a = 8^2 \quad A = 64\ FE.$