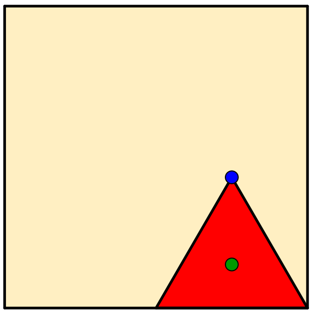
Rollendes Dreieck

Darryl Francis wurde 1948 geboren und hat viele Bücher über das Brettspiel „Scrabble“ geschrieben. Er hat unzählige Wörterspiele und -rätsel entworfen, aber auch einige mathematische Knobeleien. 1974 veröffentlichte er in der Zeitschrift „Games and Puzzles“ folgendes sinngemäße Rätsel:
Im Inneren eines Quadrates von 20 cm Seitenlänge liegt, so wie es die Skizze zeigt, ein gleichseitiges Dreieck von 10 cm Seitenlänge. Eine Ecke des Dreiecks ist mit einem blauen Punkt versehen. Das Dreieck wird nun im Uhrzeigersinn auf den Innenseiten des Quadrates abgerollt.

a) Wie lang ist der Weg des blauen Punktes, wenn er so weit gerollt wird, bis er sich wieder in seiner Ausgangsposition befindet und der blaue Punkt nach oben zeigt?

b) Welchen Weg legt der grüne Punkt während der Bewegung des blauen Punktes zurück?

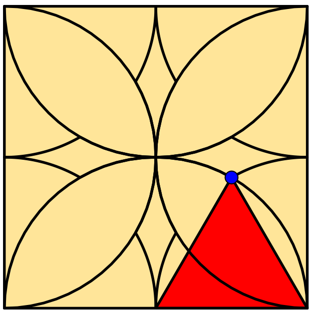


a) Aufgabe auf „spektrum.de“ unter `https://www.spektrum.de/raetsel/das-rollende-dreieck/1839376`, von Heinrich Hemme vom 11.03.2021

b) Aufgabe auf „spektrum.de“ unter `https://www.spektrum.de/raetsel/abrollendes-dreieck-im-quadrat/1336816`, von Norbert Treitz vom 12.12.2017

Lösung

a) Der blaue Punkt bekommt den Namen P. Die Ortskurve des Punktes P hat eine schöne regelmäßige Struktur. P durchläuft acht Zwölftelkreisbögen und zweimal vier Halbkreisbögen.



Dann beträgt die Weglänge mit $r = 10\ cm$

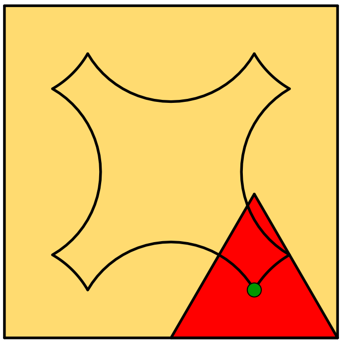
$$s_1 = 8 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{12} \cdot r + 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r, \qquad s_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r + 8 \cdot \pi \cdot r$$

$$s_1 = \frac{20}{3} \cdot \pi \ \cdot r, \qquad s_1 = \frac{20}{3} \cdot \pi\ 10\ cm,$$

$$s_1 = \frac{200}{3} \cdot \pi\ cm, \qquad \underline{\underline{s_1 \approx 209{,}44\ cm.}}$$

Der blaue Punkt legt beim Abrollen im Quadrat einen Weg von $s_1 \approx 209{,}44\ cm$ zurück.

b) Der grüne Punkt bekommt den Namen Q. Die Ortskurve des Punktes Q besteht aus vier größeren und vier kleineren Kreisbögen mit dem gleichen Radius r.
Der Radius r ist die Strecke von Q zu einem Eckpunkt des Dreiecks.



Dann ist $r^2 = \frac{1}{12} \cdot a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$ $\quad r^2 = \frac{1}{3} \cdot a^2,$

$r = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a,$ $\quad r = \frac{10}{3} \cdot \sqrt{3}\ cm.$

Der grüne Punkt macht drei Umdrehungen, die kleinen Bögen überstreichen einen Winkel von 30°, die größeren Bögen einen Winkel von 120°.

Der Gesamtweg beträgt $s_2 = 3 \cdot \left(4 \cdot \frac{\pi}{6} + 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \cdot r,$ $\quad s_2 = 3 \cdot \frac{10}{3} \cdot \pi \cdot r,$

$s_2 = 10 \cdot \pi \cdot r,$ $\quad s_2 = 10 \cdot \pi \cdot \frac{10}{3} \cdot \sqrt{3}\ cm$

$s_2 = \frac{100}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{3}\ cm$ $\quad \underline{\underline{s_2 \approx 181{,}38\ cm}}.$

Der Schwerpunkt des Dreiecks legt beim Abrollen im Quadrat einen Weg von $s_2 \approx 181{,}38\ cm$ zurück.