Rote, grüne, orangene Äpfel

Herr Pommer hat sich zum Osterfest einen neuen Taschenrechner schenken lassen. Bei allen Gelegenheiten demonstriert er nun seinen Mitmenschen den Nutzen des Selbigen. So hat er gerade die Apfelvorräte im Keller inspiziert. Freudestrahlend tippt er die Zahlen in sein neues Gerät und ist sichtlich überrascht: „Die Apfelernte vom letzten Herbst ist doch schon weit aufgebraucht. Es sind noch etwas mehr rote als orangene Äpfel übrig und von den Grünen fast zu schweigen. Zusammen sind es nun weniger als 50 “, sagt er. „Dann kannst du uns ja noch drei Äpfel heraufholen“, entgegnet seine Frau. „Ich mag jetzt nicht mehr hinuntergehen“, sagt Herr Pommer und fährt fort: „Wenn du nachher sowieso unten bist, greife doch einfach blind in den Korb und nimm drei Äpfel zufällig heraus. Ich weiß, dass du mit derselben Wahrscheinlichkeit drei verschiedenfarbige Äpfel mitbringst wie drei gleichfarbige.
Wie viele rote, orange und grüne Äpfel sind in dem Korb?

Idee von Ingmar Rubin, Berlin, nach einer Aufgabe aus Monoid, Heft 123, Seite 3, „Das Denkerchen“ von Horst Sewerin, September 2015

Lösung

Es handelt sich um eine hypergeometrische Verteilung, einem Ziehen ohne Zurücklegen. Die Zufallsgrößen werden definiert und die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse beim zufälligen Herausnehmen dreier Äpfel bestimmt.

n...Gesamtanzahl der Äpfel, x...Anzahl der roten Äpfel,
y...Anzahl der grünen Äpfel, z...Anzahl der orangenen Äpfel.

Wahrscheinlichkeit für genau einen roten, grünen, orangenen Apfel: $P\left(\{r,g,o\}\right)=\frac{x\cdot y\cdot z}{\binom{n}{3}}$,

Wahrscheinlichkeit für genau drei rote Äpfel: $P\left(\{r,r,r\}\right)=\frac{\binom{x}{3}}{\binom{n}{3}}$,

Wahrscheinlichkeit für genau drei grüne Äpfel: $P\left(\{g,g,g\}\right)=\frac{\binom{y}{3}}{\binom{n}{3}}$,

Wahrscheinlichkeit für genau drei orangene Äpfel: $P\left(\{o,o,o\}\right)=\frac{\binom{z}{3}}{\binom{n}{3}}$.

Laut Aufgabenstellung ist

$$P\left(\{r,g,o\}\right)=P\left(\{r,r,r\}\right)+P\left(\{g,g,g\}\right)+P\left(\{o,o,o\}\right),$$

$$\frac{x\cdot y\cdot z}{\binom{n}{3}}=\frac{\binom{x}{3}}{\binom{n}{3}}+\frac{\binom{y}{3}}{\binom{n}{3}}+\frac{\binom{z}{3}}{\binom{n}{3}},$$

$$x\cdot y\cdot z=\frac{1}{6}\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)+\frac{1}{6}\cdot y\cdot(y-1)\cdot(y-2)+\frac{1}{6}\cdot z\cdot(z-1)\cdot(z-2),$$

$$6\cdot x\cdot y\cdot z=x^3-2\cdot x^2+2\cdot x+y^3-2\cdot y^2+2\cdot y+z^3-2\cdot z^2+2\cdot z.$$

Zur Lösung der Gleichung werden mehrere Bedingungen gestellt.

1. Bedingung: $x+y+z<50$,
2. Bedingung: $y<z<x$,
3. Bedingung: $x>20$,
4. Bedingung: x, y und z sind ganzzahlig.

Diese Angaben reichen dem Programm „Mathematica“, um mit dem Befehl FindInstance (finde den zutreffenden Fall) die Lösung zu erzeugen.

$$FindInstance[\{6xyz==x^3-3x^2+2x+y^3-3y^2+2y+z^3-3z^2+2z,$$
$$x+y+z<50, y<z<x, x>20\}, \{x,y,z\}, Integers]$$

Die Ausgabe ist $\{\{x->22, y->6, z->18\}\}$.

In dem Korb der Familie Pommer liegen 22 rote, 6 grüne und 18 orangene Äpfel.