Rote und grüne Äpfel

Nachdenklich kommt Herr Pommer aus seinem Keller zurück. „Die Apfelernte vom letzten Herbst ist doch schon weit aufgebraucht. Es sind nur noch etwas mehr rote als grüne Äpfel übrig, und zusammen sind es weniger als 50“, brummelt er. „Dann kannst du uns ja noch zwei Äpfel heraufholen“, sagt Herr Pommer. „Wenn du nachher sowieso unten bist, greife doch einfach in den Korb und nimm zwei Äpfel zufällig heraus. Ich weiß, dass du mit derselben Wahrscheinlichkeit zwei verschiedenartige Äpfel mitbringst wie zwei gleichfarbige.“
Wie viel rote und wie viele grüne Äpfel sind unter diesen Bedingungen in dem Korb?

Aufgabe aus Monoid, Heft 144, Seite 13, „Das Denkerchen“ von Horst Sewerin, Dezember 2020

Lösung

Es handelt sich um eine hypergeometrische Verteilung, einem Ziehen ohne Zurücklegen. Die Zufallsgrößen werden definiert und die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse beim zufälligen Herausnehmen zweier Äpfel bestimmt.

n...Gesamtanzahl der Äpfel, x...Anzahl der roten Äpfel y...Anzahl der grünen Äpfel

Wahrscheinlichkeit für genau einen roten und einen grünen Apfel: $P(\{g,r\}) = \frac{x \cdot y}{\binom{n}{2}}$,

Wahrscheinlichkeit für genau zwei rote Äpfel: $P(\{r,r\}) = \frac{\binom{x}{2}}{\binom{n}{2}}$,

Wahrscheinlichkeit für genau zwei grüne Äpfel: $P(\{g,g\}) = \frac{\binom{y}{2}}{\binom{n}{2}}$.

Laut Aufgabenstellung ist $P(\{g,r\}) = P(\{r,r\}) + P(\{g,g\})$,

$$\frac{x \cdot y}{\binom{n}{2}} = \frac{\binom{x}{2}}{\binom{n}{2}} + \frac{\binom{y}{2}}{\binom{n}{2}},$$

$$x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot y \cdot (y-1),$$

Parabelgleichung $2 \cdot x \cdot y = x^2 - x + y^2 - y,\qquad x + y = (x-y)^2$ ...(1).

1.Bedingung: $\sqrt{x+y} = x - y,\qquad x + y$ ist eine Quadratzahl.

(1) umgestellt $0 = y^2 - (1 + 2 \cdot x) \cdot y - x + x^2$,

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} + x \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x + x^2 + x - x^2},$$

pos. Lsg. entfällt, da $x > y$ $\quad y = \frac{1}{2} + x - \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \cdot x},\qquad y = \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + 8 \cdot x}$,

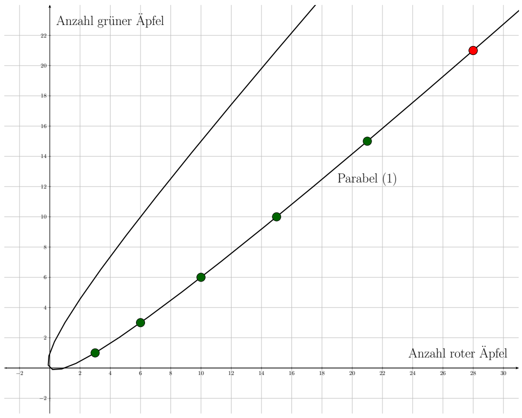
2.Bedingung: $1 + 8 \cdot x$ ist eine ungerade Quadratzahl,

3.Bedingung: $y = \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + 8 \cdot x}$ ist ganzzahlig,

4.Bedingung: $x + y < 50$ nach Voraussetzung.

Wahre Aussagen bei der Untersuchung auf die Gültigkeit der vier Bedingungen sind:

x	y
3	1
6	3
10	6
15	10
21	15
28	21



In dem Korb der Familie Pommer liegen wahrscheinlich 28 rote und 21 grüne Äpfel.