Rothschilds Töchter

Trifft man zufällig zwei Töchter der Rothschild Familie in der Stadt, so ist die Wahrscheinlichkeit genau $\frac{1}{2}$, dass diese blaue Augen haben.
Wieviele Töchter hat die Familie?

Aufgabe von Martin Gardner, (* 21. Oktober 1914, † 22. Mai 2010), US-amerikanischer Wissenschaftsjournalist, vorgestellt von Dr. Eugen Willerding am 21. Dezember 2020

Lösung

Es handelt sich um eine hypergeometrische Verteilung, einem Ziehen ohne Zurücklegen. Die Zufallsgrößen werden definiert und die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse beim zufälligen Treffen zweier Töchter bestimmt.

n...Gesamtanzahl der Töchter, b...Anzahl der Töchter mit blauen Augen,

Wahrscheinlichkeit, genau zwei Töchter mit blauen Augen zu treffen: $P(\{b,b\}) = \frac{\binom{b}{2}}{\binom{n}{2}}$

Laut Aufgabenstellung ist $P(\{b,b\}) = \frac{1}{2}$, $\frac{\binom{b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{2}$,

$2 \cdot b \cdot (b-1) = n \cdot (n-1)$ ...(1), $n^2 - n - 2 \cdot b^2 + 2 \cdot b = 0$,

$n_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \cdot b^2 - 2 \cdot b}$, $n_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + 8 \cdot b^2 - 8 \cdot b}$,

negative Lösung entfällt $n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + 8 \cdot b \cdot (b-1)}$.

Die Aufgabe reduziert sich auf die Suche nach einer ungeraden Quadratzahl q, die die Bedingung $q = 1 + 8 \cdot b \cdot (b-1)$ erfüllt. Lösungen sind:

b	q	n
3	$49 = 7^2$	4
15	$1681 = 41^2$	21
85	$57121 = 239^2$	120

Da anzunehmen ist, dass die Familie Rothschild keine 21 hat, werden sie vier Kinder haben, von denen drei blauäugig sind.

Jutta Gut, Wien, fand heraus, dass die Gleichung (1) einer negativen Pell-Gleichung

$$x^2 - d \cdot y^2 = -1$$

zugeordnet werden kann.

(1) und $\quad | \cdot 4 + 1$ $\quad 8 \cdot b \cdot (b-1) + 1 = 4 \cdot n \cdot (n-1) + 1$,

$8 \cdot b^2 - 8 \cdot b + 1 = 4 \cdot n^2 - 4 \cdot n + 1$,

$2 \cdot (2 \cdot b - 1)^2 - 1 = (2 \cdot n - 1)^2$,

$2 \cdot b - 1 = y,\ 2 \cdot n - 1 = x$ $\quad x^2 - 2 \cdot y^2 = -1$ ...(2).

Da x, y, d ganze Zahlen sein sollen, kann der Wahrheitswert der in der Tabelle angegebenen Zahlen mit (2) überprüft werden.

$b = 3, n = 4 \Rightarrow y = 5, x = 7$ $\quad 7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1$, $\quad 49 - 2 \cdot 25 = -1$ w.A.

$b = 15, n = 21 \Rightarrow y = 29, x = 41$ $\quad 41^2 - 2 \cdot 29^2 = -1$, $\quad 1681 - 2 \cdot 841 = -1$ w.A.

$b = 85, n = 120 \Rightarrow y = 169, x = 239$ $\quad 239^2 - 2 \cdot 169^2 = -1$, $\quad 57121 - 2 \cdot 28561 = -1$ w.A.