Der Schwerpunkt der Wäscheleine

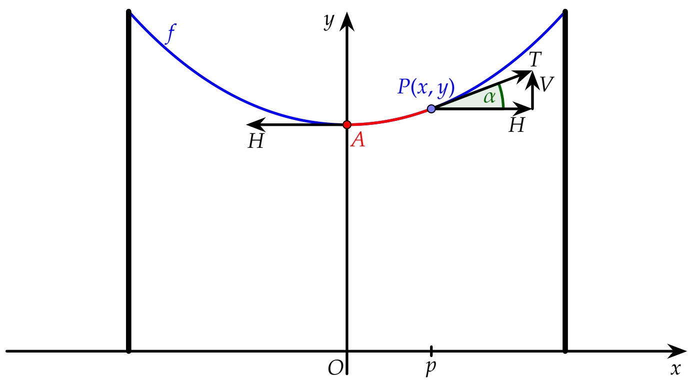
Im Garten der Witwe Bolte ist zwischen zwei gleich hohen Pfosten eine Wäscheleine gespannt. Die Leine ist ein Stück länger als der Pfostenabstand, und darum hängt sie ein Stück durch. Als Frau Bolte ihre Hühner tot im Apfelbaum hängen sieht, setzt ihr Herz für einige Schläge aus. Sie muss sich an der Wäscheleine festhalten, um nicht vor Entsetzen zusammenzubrechen, und zieht sie dadurch in der Mitte ein Stück nach unten.
Was passiert mit dem Schwerpunkt der Wäscheleine? Bleibt er in gleicher Höhe oder bewegt er sich nach oben oder nach unten?

Aufgabe aus dem Buch „Düsentrieb contra Einstein - 61. Der Schwerpunkt der Wäscheleine“ von Heinrich Hemme, Juni 2022

Lösung

Die Wäscheleine wird als Kettenlinie betrachtet, deren Schwerpunkt $S\,(x_S \mid y_S)$ zu bestimmen ist. Das Physikalische Wörterbuch, Springer-Verlag, Herausgeber: W.H.Westphal, Berlin, beschreibt sie so: „Die Seilkurve (Kettenlinie, Katenoide) ist die Kurve, die sich im Gleichgewicht einstellt, wenn die Endpunkte eines unelastischen, homogenen und vollkommen biegsamen Seiles von konstantem Querschnitt an zwei (nicht notwendig gleich hohen) Stellen im Schwerefeld befestigt sind und das Seil außer seinem eigenen Gewicht keinen anderen Belastungen unterworfen ist.“
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) leitete im Jahre 1690 die exakte Beschreibung der Kettenlinie mit Hilfe ihrer physikalischen Gegebenheiten her. Da er sich der Richtigkeit seiner Lösung nicht sicher war, hielt er seine Herleitung zurück und rief zu einem Wettbewerb auf, bei dem es darum ging, eine Herleitung der Kettenlinie zu finden. Die einzigen Einsendungen, die er bekam, waren von Johann Bernoulli (1667 bis 1748) und Christiaan Huygens (1629 bis 1695), die ebenfalls eine vollständige, mathematisch richtige Lösung gefunden hatten. Im Juni des folgenden Jahres wurden die drei voneinander unabhängig gefundenen Lösungen veröffentlicht, der Name „catenary“ wurde von Huygens übernommen.

1. Herleitung der Kettenlinie f



Der Koordinatenursprung O wird in die Mitte beider Pfosten gelegt. Es werden die in jedem Punkt des Seils wirkenden Krafte betrachtet. Die Spannkraft des Seil als resultirende Kraft $T(x)$ kann in eine horizontale Kraft $F_H(x) = H$ und eine vertikale Kraft $F_V(x) = V$ zerlegt werden. Bei einem ruhenden Seil ist H in jedem Seilpunkt stets gleich groß, da sich die entgegensetzt wirkenden Kräfte aufgrund der Symmetrie ausgleichen. Mit zunehmender Höhe des Punktes P, erhöht sich auch die Kraft V, da mehr Seilmasse die Spannkraft vergrößert. Wird μ als Seilmasse je Meter bezeichnet, g als Ortskonstante und $s(x)$ als Länge des Seils vom Punkt A bis zum Punkt P (rote Kurve) kann V definiert werden.

Es ist $\quad V = \mu \cdot g \cdot s(x),$

mit $s(x) = \int\limits_0^p \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \quad V = \mu \cdot g \cdot \int\limits_0^p \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \qquad ...(1).$

Eine weitere Möglichkeit, die wirkenden Kräfte darzustellen, erlaubt die Winkelbeziehung

$tan\ \alpha = \frac{V}{H}$, in (1) $tan\ \alpha = \frac{\mu \cdot g}{H} \cdot \int\limits_0^p \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$

Mit $tan\ \alpha = y'$ und $k = \frac{\mu \cdot g}{H}$ ist $y' = k \cdot \int\limits_0^p \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$ $y' = k \cdot \int\limits_0^p \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ ...(2).

Die Ableitung von (2) ist $y'' = k \cdot \sqrt{1 + y'^2}$ (DGL der Kettenlinie) ...(3).

Die Gleichung (3) muss nun gelöst werden.

Durch Substitution von $y' = z$ folgt aus (2) $z = k \cdot \int\limits_0^p \sqrt{1 + z^2}\, dx.$

Die Ableitung von z ist $z' = k \cdot \sqrt{1 + z^2},$ $\frac{dz}{dx} = k \cdot \sqrt{1 + z^2},$

integrieren $\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int k \cdot\, dx,$ $\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = k \cdot x + c_1,$

das Grundintegral $\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = arsinh\ z + c$ liefert $arsinh\ z + c_2 = k \cdot x + c_1,$

$arsinh\ z$ ist die Umkehrfunktion von $sinh\ z$, d.h. $sinh^{-1} z + c_2 = k \cdot x + c_1,$

$z = sinh\,(k \cdot x + c_1) - c_2,$

Resubstitution $y' = sinh\,(k \cdot x + c_1) - c_2,$ $\frac{dy}{dx} = sinh\,(k \cdot x + c_1) - c_2,$

$\int sinh\ x\ dx = cosh\ x + c$ $y = \frac{1}{k} \cdot cosh\,(k \cdot x + c_1) - c_2 + c_3,$

$-c_2 + c_3 = c, k = \frac{1}{a}$ $y = a \cdot cosh\left(\frac{x}{a} + c_1\right) + c.$

Die Konstante c_1 gibt eine Verschiebung des Seils in x-Richtung und die Konstante c in y-Richtung an. Befindet sich der Scheitel des Seils genau in der Mitte der beiden Pfosten, ist $c_1 = 0$, man erhält die Gleichung der Kettenlinie

$$y = a \cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad ...(4).$$

Die Integrationskonstante c kann bestimmt werden. Mit der Pfostenhöhe h und dem

Durchhang d ist $y(0) = h - d$ und $y(0) = a \cdot cosh\left(\frac{0}{a}\right) + c,$

sodass mit $cosh(0) = 1$ $h - d = a + c,$ $c = h - d - a$ ...(5),

(5) in (4) $\underline{\underline{y = a \cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right) + h - d - a}}$ ...(6).

2. Die Länge ℓ der Kettenlinie

Der halbe Abstand der Pfosten sei w,

dann ist $\ell = 2 \cdot \int\limits_0^w \sqrt{1 + (y'^2)}\, dx$ ...(7).

Die Ableitung von (6) ist $y' = sinh\left(\frac{x}{a}\right)$ ...(8).

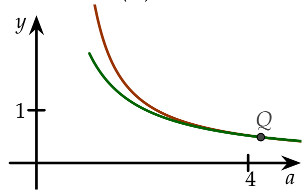
Weiterhin ist mit (8) $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)},$ $\sqrt{1 + y'^2} = cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ ...(9),

(9) in (7), $sinh(0) = 0$ $\ell = 2 \cdot \int\limits_0^w cosh\left(\frac{x}{a}\right)\, dx,$ $\underline{\underline{\ell = 2 \cdot a \cdot sinh\left(\frac{w}{a}\right)}}$ ...10.

3. Berechnung des Skalierungsfaktors a am Beispiel der Wäscheleine

Angenommen, die Wascheleine hängt mit ihren Enden zwischen zwei Pfosten in einer Höhe von $h = 2\ m$, beide Pfosten haben einen Abstand von $2 \cdot w = 4\ m$ und die Leine hat eine Länge von $\ell = 4{,}15\ m$.

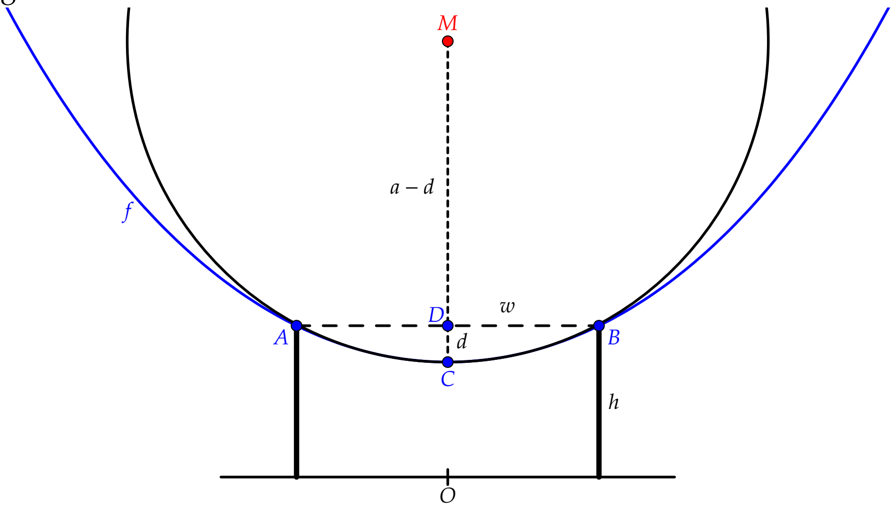
Dann ist mit (10) $\frac{\ell}{2 \cdot a} = sinh\left(\frac{w}{a}\right),$ $\frac{4{,}15}{2 \cdot a} = sinh\left(\frac{2}{a}\right)$



Die Funktionen $y = \frac{4{,}15}{2 \cdot a}$ und $y = sinh\left(\frac{2}{a}\right)$ schneiden sich im Punkt $Q(4{,}23988 \mid 0{,}4894)$.

Der Wert von a ist $a \approx 4{,}24\ m$.

Der Wert von a kann geometrisch als Krümmungsradius der Kurve im Minimum gedeutet werden. Dort stimmen die erste und die zweite Ableitung überein. Ein Kreis mit dem Radius $r = a$ schmiegt sich der Kettenlinie an.



4. Berechnung des Durchhangs d der Wäscheleine

Der Durchhang kann über den Punkt $B\,(w \mid h)$ bestimmt werden.

Dort ist mit (4) $\quad h = a \cdot cosh\left(\frac{w}{a}\right) + c, \qquad 4 \cdot h^2 = 4 \cdot \left(a \cdot cosh\left(\frac{w}{a}\right) + c\right)^2,$

$$4 \cdot h^2 = 4 \cdot a^2 \cdot cosh^2\left(\frac{w}{a}\right) + 8 \cdot a \cdot c \cdot cosh\left(\frac{w}{a}\right) + 4 \cdot c^2 \qquad ...(11)$$

und mit (10) $\quad \ell = 2 \cdot a \cdot sinh\left(\frac{w}{a}\right) \qquad \ell^2 = 4 \cdot a^2 \cdot sinh^2\left(\frac{w}{a}\right) \qquad ...(12),$

(11)-(12) $\quad 4 \cdot h^2 - \ell^2 = 4 \cdot a^2 \cdot \left(cosh^2\left(\frac{w}{a}\right) - sinh^2\left(\frac{w}{a}\right)\right) + 8 \cdot a \cdot c \cdot cosh\left(\frac{w}{a}\right) + 4 \cdot c^2,$

$cosh^2\left(\frac{w}{a}\right) - sinh^2\left(\frac{w}{a}\right) = 1 \quad 4 \cdot h^2 - \ell^2 = 4 \cdot a^2 + 8 \cdot a \cdot c \cdot cosh\left(\frac{w}{a}\right) + 4 \cdot c^2,$

mit (4) ist $h - c = a \cdot cosh\left(\frac{w}{a}\right) \quad 4 \cdot h^2 - \ell^2 = 4 \cdot a^2 + 8 \cdot c \cdot (h - c) + 4 \cdot c^2,$

$$4 \cdot h^2 - \ell^2 = 4 \cdot a^2 + 8 \cdot c \cdot h - 8 \cdot c^2 + 4 \cdot c^2$$

$\mid : 4$, ordnen $\quad h^2 - 2 \cdot c \cdot h + c^2 = \frac{\ell^2}{4} + a^2, \qquad (h - c)^2 = \frac{\ell^2}{4} + a^2,$

mit (5) $\quad |h - (h - d - a)| = \pm\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + a^2}, \qquad d + a = \pm\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + a^2},$

negative Lösung entfällt $\quad d = -a + \sqrt{\frac{\ell^2}{4} + a^2},$

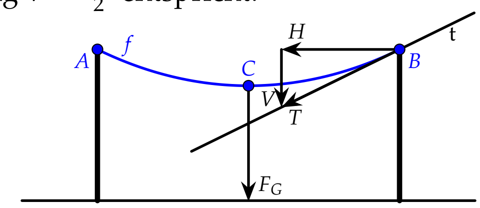
$$d = -4{,}23988\,m + \sqrt{\frac{(4{,}15\,m)^2}{4} + (4{,}23988\,m)^2},$$

$$\underline{\underline{d = 0{,}48052\,m.}}$$

Der Durchhang der Wäscheleine beträgt rund 48 cm.

5. Berechnung der horizontalen Zugkraft H der Wäscheleine

Die Gewichtskraft der Leine halbiert sich in den Pfosten, so dass die vertikale Zugkraft im Punkt $B\,(w \mid h)$ der Gleichung $V = \frac{F_G}{2}$ entspricht.



Mit $\quad tan\,\alpha = \frac{V}{H}, \qquad y' = \frac{F_G}{2 \cdot H} \qquad ...(13),$

und (8), (10) $\quad y' = sinh\left(\frac{w}{a}\right) \qquad y' = \frac{\ell}{2 \cdot a} \qquad ...(14),$

(13)=(14) $\quad \frac{F_G}{2 \cdot H} = \frac{\ell}{2 \cdot a}, \qquad H = \frac{a \cdot m \cdot g}{\ell},$

ist mit $m = \rho \cdot A \cdot \ell \quad H = a \cdot \rho \cdot A \cdot g.$

Angenommen, die Leine besteht aus Sisal ($\rho = 1{,}33\frac{g}{cm^3}$) und ist $A = 6\ mm$ dick, dann ist

$$H = 4{,}23988\ m \cdot 1{,}33\frac{g}{cm^3} \cdot \pi \cdot (0{,}3\ cm)^2 \cdot 9{,}81\frac{N}{kg},$$

$$H = 15{,}6411 \cdot 10^{-1}\ N, \qquad \underline{\underline{H = 1{,}56411\ N}}.$$

Zur Vollständigkeit V in B:

$$V = \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \ell \cdot g,$$

$$V = \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}33\frac{g}{cm^3} \cdot \pi \cdot (0{,}3\ cm)^2 \cdot 4{,}15\ m \cdot 9.81\frac{N}{kg},$$

$$V = 7{,}65475 \cdot 10^{-1}\ N, \qquad \underline{\underline{V = 0{,}76548\ N}},$$

dann ist

$$T = \sqrt{H^2 + V^2}, \qquad T = \sqrt{(1{,}56411\ N)^2 + (0{,}76548\ N)^2},$$

$$\underline{\underline{T = 1{,}74138\ N}}.$$

6. Der Schwerpunkt $S\,(x_S \mid y_S)$ der Wäscheleine - die eigentliche Aufgabe

Wegen der Symmetrie der Kettenlinie liegt der Schwerpunkt auf der y-Achse, damit ist $x_S = 0$. Ein kleines Stück der Kettenlinie hat die Länge $ds \approx \sqrt{1 + y'^2}\ dx$. Der genaue y-Wert des Schwerpunktes kann durch die Summation aller kleinen Kurvenstücke ds mit dem Integral bestimmt werden.

Es ist

$$y_S = \frac{1}{\ell} \cdot \int_{-w}^{w} y \cdot ds, \qquad y_S = \frac{2}{\ell} \cdot \int_{0}^{w} y \cdot \sqrt{1 + y'^2}\ dx,$$

mit (4), (9), (10)

$$y_S = \frac{2}{\ell} \cdot \int_{0}^{w} \left(a \cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c\right) \cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right)\ dx,$$

$$y_S = \frac{2}{\ell} \cdot \int_{0}^{w} \left(a \cdot cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) + c \cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)\ dx,$$

und den Stammfunktionen

$$y_S = \frac{2}{\ell} \cdot \left[\frac{a \cdot x}{2} + \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot sinh\left(\frac{2 \cdot x}{a}\right) + a \cdot c \cdot sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^w,$$

in den Grenzen, $sinh\ 0 = 0$

$$y_S = \frac{2}{\ell} \cdot \left(\frac{a \cdot w}{2} + \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot sinh\left(\frac{2 \cdot w}{a}\right) + a \cdot c \cdot sinh\left(\frac{w}{a}\right)\right),$$

$c = h - d - a$

$$y_S = \frac{2 \cdot a}{\ell} \cdot \left(\frac{w}{2} + \frac{1}{4} \cdot a \cdot sinh\left(\frac{2 \cdot w}{a}\right) + (h - d - a) \cdot sinh\left(\frac{w}{a}\right)\right),$$

mit $w = 2\ m$, $h = 2\ m$, a, d, ℓ

$$\underline{\underline{y_S = 1{,}68311}}.$$

Der Schwerpunkt der Wäscheleine liegt in der Mitte in einer Höhe von $1{,}68\ m$.

7. Der Schwerpunkt $S'\left(x'_S \mid y'_S\right)$ der gespannten Wäscheleine

Der Durchhang $d' = \overline{DE}$ kann mit dem Satz von Pythagoras ermittelt werden.

Es ist

$$d'^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - \left(\frac{2 \cdot w}{2}\right)^2, \qquad d'^2 = (2{,}075\ m)^2 - (2\ m)^2,$$

$$d'^2 = 0{,}305625\ m^2, \qquad d' = 0{,}55283\ m.$$

Der Durchhang der gespannten Wäscheleine beträgt rund $d' = 55{,}3\ cm$. Der Schwerpunkt liegt in der Mitte von d', so dass $y'_S = h - \frac{d'}{2}$, $y'_S = 1{,}72358\ m$, $\underline{\underline{y'_S \approx 1{,}72\ m}}$.

Der Schwerpunkt der gespannten Wäscheleine liegt in der Mitte in einer Höhe von $1{,}72\ m$.

8. Schlussfolgerung

Obwohl Witwe Bolte die Wäscheleine nach unten zieht, liegt der Schwerpunkt der dadurch gespannten Wäscheleine rund $4\ cm$ höher als der Schwerpunkt der normal hängenden Leine.