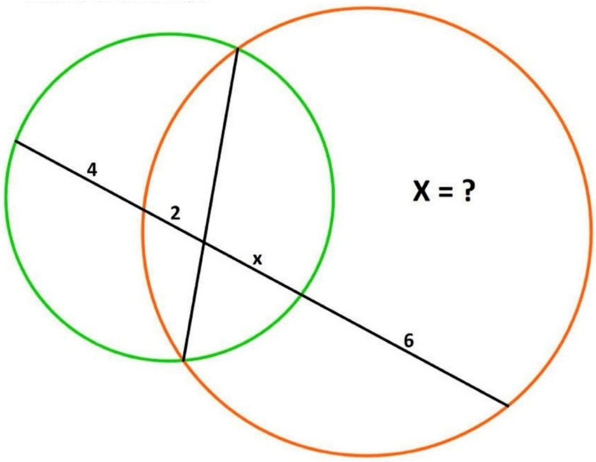
Sehnenabschnitt und Radien gesucht

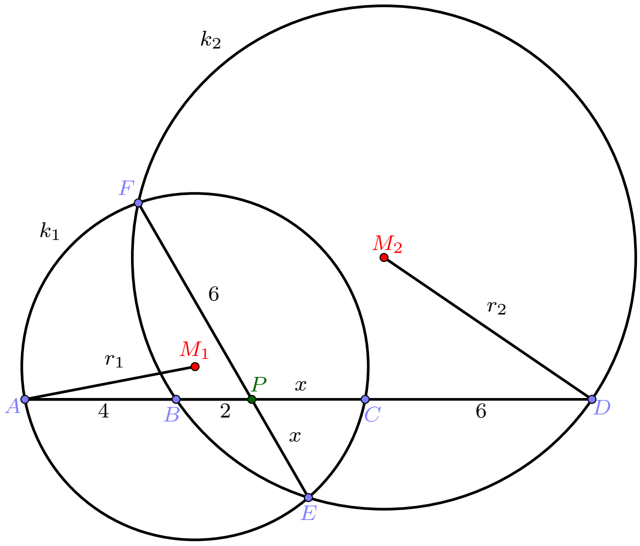
a) Wie lang ist die Strecke x in der Figur?

b) Welche Radien haben die Kreise?



Aufgabe auf `https://dare2solve.com/` vom 22. April 2022, gefunden von Dr. Eugen Willerding

Lösung



a) Der Punkt P wird in den Koordinatenursprung gelegt und der Sehnensatz genutzt.

Im Kreis k_2 ist dann	$(6+x)\cdot 2 = 6\cdot x$	$12 + 2\cdot x = 6\cdot x$
	$4\cdot x = 12,$	$\underline{\underline{x = 3}}.$

b) Die Punkte $A(-6|0)$, $C(3|0)$ und $F(-3|\sqrt{27})$ liegen auf dem Kreis k_1.
Diese Punkte werden in die Kreisgleichung $(x - x_{M_1})^2 + (y - y_{M_1})^2 = r_1^2$ eingesetzt, so dass

mit $A \in k_1$	$(-6 - x_{M_1})^2 + y_{M_1}^2 = r_1^2,$	$36 + 12\cdot x_{M_1} + x_{M_1}^2 + y_{M_1}^2 = r_1^2$	...(1),
mit $C \in k_1$	$(3 - x_{M_1})^2 + y_{M_1}^2 = r_1^2,$	$9 - 6\cdot x_{M_1} + x_{M_1}^2 + y_{M_1}^2 = r_1^2$	...(2),
(1)-(2)	$27 + 18\cdot x_{M_1} = 0,$	$x_{M_1} = -\frac{3}{2}$	...(3),
mit $F \in k_1$, (3)	$\left(-3 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{27} - y_{M_1}\right)^2 = r_1^2,$	$\frac{9}{4} + 27 - 2\cdot\sqrt{27}\cdot y_{M_1} + y_{M_1}^2 = r_1^2$	...(4),
(1)-(4), mit (3)	$9 - \frac{9}{4} - 18 + \frac{9}{4} + 2\cdot\sqrt{27}\cdot y_{M_1} = 0,$	$2\cdot\sqrt{27}\cdot y_{M_1} = 9$	
	$y_{M_1} = \frac{9}{6\cdot\sqrt{3}},$	$y_{M_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	...(5).

Der Mittelpunkt des Kreises k_1 hat die Koordinaten $M_1\left(-\frac{3}{2}|\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Der Radius des Kreises k_1 ist die Strecke $r_1 = \overline{M_1A}$.

$$r_1 = \sqrt{\left(-6+\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(0-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \qquad r_1 = \sqrt{\tfrac{81}{4}+\tfrac{3}{4}},$$
$$\underline{\underline{r_1 = \sqrt{21}}}.$$

Die Punkte $B(-2|0)$, $D(9|0)$ und $F(-3|\sqrt{27})$ liegen auf dem Kreis k_2.

Mit $B \in k_2$	$(-2-x_{M_2})^2 + y_{M_2}^2 = r_2^2$,	$4+4\cdot x_{M_2} + x_{M_2}^2 + y_{M_2}^2 = r_2^2$	...(6),
mit $D \in k_2$	$(9-x_{M_2})^2 + y_{M_2}^2 = r_2^2$,	$81-18\cdot x_{M_2}+x_{M_2}^2+y_{M_2}^2 = r_2^2$	...(7),
(7)-(6)	$77-22\cdot x_{M_2} = 0$,	$x_{M_2} = \frac{7}{2}$	...(8),
mit $F \in k_2$, (3)	$\left(-3-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{27}-y_{M_2}\right)^2 = r_2^2$,	$\frac{169}{4}+27-2\cdot\sqrt{27}\cdot y_{M_2}+y_{M_2}^2 = r_2^2$	...(9),
(9)-(6) mit (8)	$23+\frac{169}{4}-14-\frac{49}{4}-2\cdot\sqrt{27}\cdot y_{M_2} = 0$,	$39-2\cdot\sqrt{27}\cdot y_{M_2} = 0$,	
	$y_{M_2} = \frac{39}{6\cdot\sqrt{3}}$,	$y_{M_2} = \frac{13}{6}\cdot\sqrt{3}$.	

Der Mittelpunkt des Kreises k_2 hat die Koordinaten $M_1\left(\frac{7}{2}|\frac{13}{6}\cdot\sqrt{3}\right)$. Der Radius des Kreises k_2 ist die Strecke $r_2 = \overline{M_2D}$.

$$r_2 = \sqrt{\left(9-\tfrac{7}{2}\right)^2 + \left(0-\tfrac{13}{6}\cdot\sqrt{3}\right)^2}, \quad r_2 = \sqrt{\tfrac{121}{4}+\tfrac{169}{12}},$$
$$\underline{\underline{r_2 = \sqrt{\tfrac{133}{3}}}}.$$

Der Kreis k_1 hat einen Radius von $r_1 = \sqrt{21}$, der Kreis k_2 einen Radius von $r_2 = \sqrt{\frac{133}{3}}$.