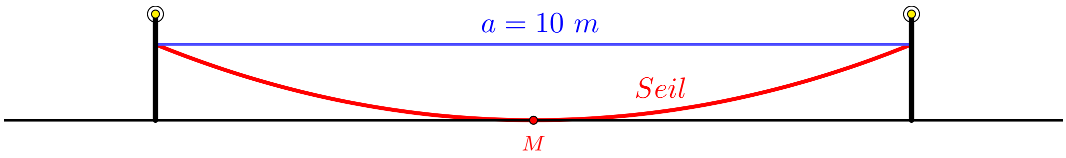
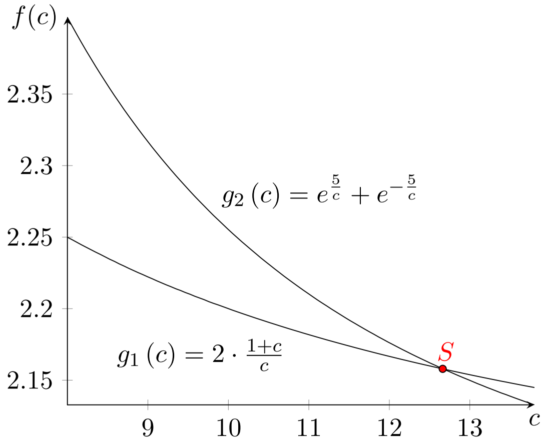
Seillänge zwischen zwei Pfosten

Zwei Pfosten haben einen lichten Abstand von 10 m. Ein Seil, das an jeden Pfosten in $1,0$ m Höhe über dem Erdboden befestigt ist, berührt in der Mitte den Erdboden.
Welche Länge hat das Seil?



Lösung
Eine Seilkurve, auch Katenoide genannt, ist eine mathematische Kurve, die den Durchhang eines an seinen Enden aufgehängten Seiles unter dem Einfluss der Schwerkraft beschreibt. Sie ist das Ergebnis der kleinst möglichen potentiellen Energie des Seils.
Eine Seilkurve f kann allgemein beschrieben werden mit der Gleichung $f(x) = \frac{c}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$, wenn $c \neq 0$. Da für $x = 0$ der Scheitel der Seilkurve bei $S(0 \mid c)$ liegt, muss von f noch c subtrahiert werden, so dass das angegebene Problem der Funktion $s(x) = \frac{c}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) - c$ entspricht.
Legt man den Punkt M in den Koordinatenursprung, haben zwei weitere Punkte des Seils die Koordinaten $A(-5 \mid 1)$ und $B(5 \mid 1)$.
B in s: $\quad 1 = \frac{c}{2} \cdot \left(e^{\frac{5}{c}} + e^{-\frac{5}{c}}\right) - c, \quad 2 \cdot \frac{1+c}{c} = e^{\frac{5}{c}} + e^{-\frac{5}{c}}$.
Die Funktionen $g_1(c) = 2 \cdot \frac{1+c}{c}$ und $g_2(c) = e^{\frac{5}{c}} + e^{-\frac{5}{c}}$ haben ihren Schnittpunkt bei $S\left(12{,}66324 \mid 2{,}15794\right)$.
Der Wert von c ist $c = 12{,}66324$.



Die Länge des Seiles berechnet sich aus dem Integral $\quad \ell = \int_{-5}^{5} \sqrt{1 + s'(x)^2} \cdot dx$ bzw. wegen der Axialsymmetrie $\quad \ell = 2 \cdot \int_0^5 \sqrt{1 + s'(x)^2} \cdot dx \qquad$ ...(1).
Die Ableitung von s ist $\quad s'(x) = \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot e^{\frac{x}{c}} - \frac{1}{c} \cdot e^{-\frac{x}{c}}\right), \qquad s'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right)$.
$s'(x)$ in (1): $\quad \ell = 2 \cdot \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{1}{4} \cdot \left(e^{2 \cdot \frac{x}{c}} - 2 + e^{-2 \cdot \frac{x}{c}}\right)} \cdot dx, \quad \ell = 2 \cdot \int_0^5 \sqrt{\frac{e^{2 \cdot \frac{x}{c}}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{-2 \cdot \frac{x}{c}}}{4}} \cdot dx,$
$\ell = 2 \cdot \int_0^5 \sqrt{\left(\frac{e^{\frac{x}{c}}}{2} + \frac{e^{-\frac{x}{c}}}{2}\right)^2} \cdot dx, \quad \ell = \int_0^5 \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) \cdot dx, \qquad \ell = \left[c \cdot e^{\frac{x}{c}} - c \cdot e^{-\frac{x}{c}}\right]_0^5,$
$\ell = c \cdot e^{\frac{5}{c}} - c \cdot e^{-\frac{5}{c}}, \quad \ell = 12{,}66324 \cdot \left(e^{\frac{5}{12{,}66324}} - e^{-\frac{5}{12{,}66324}}\right), \qquad \underline{\underline{\ell = 10{,}26187\ LE}}.$
Das Seil ist rund $10{,}26$ m lang.