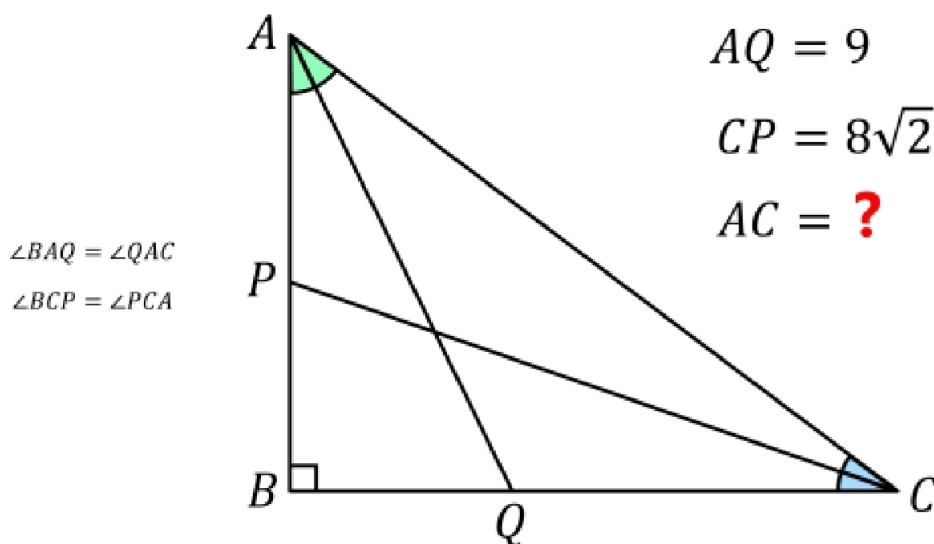


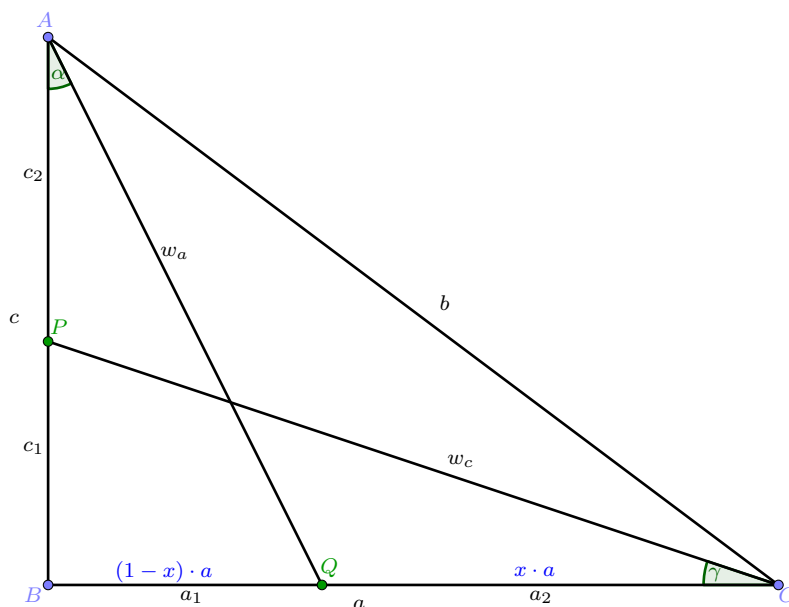
Seite eines Dreiecks

Wie lang ist die Seite \overline{AC} ?



Aufgabe von Presh Tawalkar aus „Mind Your Decisions“ bei <https://www.youtube.com/watch?v=51n6DGHmRHQ> vom 07. Februar 2023

Lösung



Der Satz über die Winkelhalbierenden liefert

$$\frac{b}{c} = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{b}{c} = \frac{x \cdot a}{(1-x) \cdot a},$$

$$b - b \cdot x = c \cdot x, \quad x = \frac{b}{b+c} \quad \dots(1),$$

dann ist mit (1)

$$a_1 = \left(1 - \frac{b}{b+c}\right) \cdot a, \quad a_1 = \left(\frac{b+c-b}{b+c}\right) \cdot a,$$

$$a_1 = \frac{a \cdot c}{b+c} \quad \dots(2),$$

und

$$a_2 = a \cdot \frac{b}{b+c}, \quad a_2 = \frac{a \cdot b}{b+c} \quad \dots(3).$$

Nun kann der Satz von Stewart genutzt werden,

es ist

$$w_a^2 = b^2 \cdot \frac{a_1}{a} + c^2 \cdot \frac{a_2}{a} - a_1 \cdot a_2, \quad w_a^2 = b^2 \cdot \frac{a_1}{a} + c^2 \cdot \frac{a_2}{a} - a_1 \cdot a_2,$$

mit (2), (3)

$$w_a^2 = b^2 \cdot \frac{c}{b+c} + c^2 \cdot \frac{b}{b+c} - \frac{a \cdot c}{b+c} \cdot \frac{a \cdot b}{b+c},$$

$$w_a^2 = \frac{b^2 \cdot c}{b+c} + \frac{b \cdot c^2}{b+c} - \frac{a^2 \cdot b \cdot c}{(b+c)^2}, \quad w_a^2 = b \cdot c \cdot \left(\frac{b+c}{b+c} - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right),$$

$$w_a^2 = b \cdot c \cdot \left(1 - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \right) \quad \dots(4).$$

Analog gilt für w_c^2

$$w_c^2 = a \cdot b \cdot \left(1 - \left(\frac{c}{a+b} \right)^2 \right) \quad \dots(5).$$

Mit (2) in (4) ist

$$w_a^2 = b \cdot c \cdot \left(1 - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \right), \quad w_a^2 = b \cdot c \cdot \frac{c^2 - a^2}{c^2},$$

$$a_1^2 = w_a^2 - c^2$$

$$w_a^2 = b \cdot c \cdot \frac{c^2 - a^2}{c^2}, \quad w_a^2 \cdot c = b \cdot (2 \cdot c^2 - w_a^2),$$

$$\text{mit } w_a^2 = 81$$

$$c^2 - \frac{w_a^2}{2 \cdot b} \cdot c - \frac{w_a^2}{2} = 0, \quad c^2 - \frac{81}{2 \cdot b} \cdot c - \frac{81}{2} = 0 \quad \dots(6),$$

analog ist $w_c^2 = 128$ mit (5)

$$a^2 - \frac{w_c^2}{2 \cdot b} \cdot a - \frac{w_c^2}{2} = 0, \quad a^2 - \frac{64}{b} \cdot a - 64 = 0 \quad \dots(7).$$

Mit den drei Gleichungen (6), (7) und $a^2 + c^2 = b^2$ findet das Programm Wolfram Mathematica die Lösungen für a , b und c . Der Befehl dafür lautet

Solve[{ $c^2 - 81/2/b \cdot c - 81/2 == 0$, $a^2 - 64/b \cdot a - 64 == 0$, $a^2 + c^2 == b^2$ },{a,b,c}, Reals].

So ist $a = \frac{24}{\sqrt{5}}$, $b = 6 \cdot \sqrt{5}$, $c = \frac{18}{\sqrt{5}}$.

Will man per Hand die Lösungen finden, muss eine Betrachtung der Winkel α und γ erfolgen.

$$\text{So ist im Dreieck } \triangle BQA \quad \cos \alpha = \frac{c}{w_a}, \quad c = 9 \cdot \cos \alpha \quad \dots(8),$$

$$\text{und im Dreieck } \triangle BCA \quad \tan(2\alpha) = \frac{a}{c}, \quad a = c \cdot \tan(2\alpha) \quad \dots(9),$$

$$(8) \text{ in } (9), \tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad a = 9 \cdot \cos \alpha \cdot \tan(2\alpha), \quad a = 9 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha},$$

$$a = 18 \cdot \cancel{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \frac{1 - \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}, \quad a = \frac{18 \cdot \sin \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \dots(10).$$

Im Dreieck $\triangle BCP$ ist

$$\cos \gamma = \frac{a}{w_c}, \quad a = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \gamma,$$

$$2\alpha + 2\gamma = 90^\circ, \quad \gamma = 45^\circ - \alpha$$

$$a = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ - \alpha),$$

$$a = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 45^\circ \cdot \sin \alpha),$$

$$a = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha),$$

$$a = 8 \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\dots(11).$$

Mit (10)=(11) ist

$$\frac{18 \cdot \sin \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = 8 \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha), \quad \frac{1}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{1}{\tan \alpha} + 1 \right),$$

$$\frac{9}{4} = \left(\frac{1}{\tan \alpha} + 1 \right) \cdot (1 - \tan^2 \alpha), \quad \frac{9}{4} = \frac{1}{\tan \alpha} - \tan \alpha + 1 - \tan^2 \alpha,$$

$$| \cdot \tan \alpha$$

$$\frac{9}{4} \cdot \tan \alpha = 1 - \tan^2 \alpha + \tan \alpha - \tan^3 \alpha,$$

$$| \cdot (-1)$$

$$0 = \tan^3 \alpha + \tan^2 \alpha + \frac{5}{4} \cdot \tan \alpha - 1,$$

Substitution $\tan \alpha = x$

$$0 = x^3 + x^2 + \frac{5}{4} \cdot x - 1 \quad \dots(12),$$

die Funktion

$$f(x) = x^3 + x^2 + \frac{5}{4} \cdot x - 1,$$

hat die Nullstelle

$$x_N = \frac{1}{2}.$$

Probe: x_N in (12)

$$0 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} - 1$$

$$0 = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{5}{8} - 1$$

$$0 = 0 \quad \text{w.A.}$$

Damit ist

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right),$$

und mit α in (8)

$$c = 9 \cdot \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right),$$

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$c = \frac{18}{\sqrt{5}}.$$

α in (11) ergibt

$$a = 8 \cdot \left(\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) \right),$$

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$a = 8 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$a = \frac{24}{\sqrt{5}}.$$

b kann bestimmt werden

$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$b^2 = \frac{576}{5} + \frac{324}{5}$$

$$b^2 = \frac{900}{5},$$

$$b = \frac{30}{\sqrt{5}}$$

$$\underline{\underline{b = 6 \cdot \sqrt{5}}}.$$

Die Seite b des Dreiecks $\triangle ABC$ hat eine Länge von $\overline{AC} = 6 \cdot \sqrt{5} \text{ LE}$.

Ein großes Dankeschön geht an Andreas Grieser für seine schöne Lösungsidee über die Winkel α und γ .

