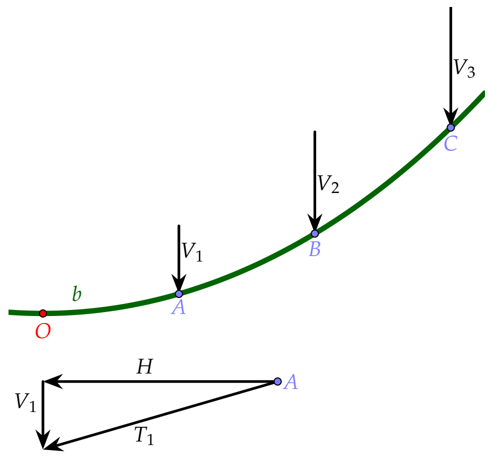
Der spannungsgleiche Bogen

Eine Bogenlinie gilt als spannungsgleich, wenn die Spannkraft pro Querschnittfläche an allen Stellen konstant ist. Bei diesem optimalen Bogen ist die Materialbelastung an allen Stellen gleich groß.
Welche Gleichung besitzt solch ein spannungsgleicher Bogen? Welche Länge besitzt er?

Lösungsidee und Herleitung der DGL von Andreas Grieser, Greifswald

1. Einführung

In seinem 1838 erschienenen „Untersuchungen über die Kettenbrückenlinie“ schreibt Dr. Jakob Philipp Kulik, Professor der höheren Mathematik an der k. k. Prager Universität:
„Denkt man sich nun eine ungleichförmig dicke Kette von der Beschaffenheit, dass ihre Stärke von ihrer Mitte gegen die beiden Enden in dem Verhältnisse wächst, als die Spannungen, denen einzelne Punkte derselben unterworfen sind, grösser werden, an ihren beiden Enden unveränderlich aufgehängt, und sich selbst überlassen; so bildet sie eine von der gemeinen Kettenlinie abweichende krumme Linie, welche wegen der gleichen Festigkeit oder Spannung aller ihrer Theile die gleichgespannte Kettenlinie (*the Catenary of equal strength*) genannt werden kann.“
Wenn der Querschnitt proportional zur Spannkraft ausgebildet ist, ist es gleichwahrscheinlich, dass ein Seil oder Bogen an irgendeiner Stelle versagt.
Diese auf dem Kopf stehende Kurve könnte auch das Profil eines Gewölbes ohne Überlastung darstellen.
Die Kurve wurde 1826 von Davies Gilbert (1767–1839), Pierre Joseph Étienne Finck (1797-1870), Étienne Bobillier (1798-1840) und 1836 von Gaspard Gustave de Coriolis (1792–1843) untersucht. Andere Namen dieser Kurve sind Coriolis-Kettenlinie, Längskurve oder Kurve des logarithmischen Kosinus.



2. Herleitung der spannungsgleichen Bogenlinie

Der Koordinatenursprung O wird in den Tiefpunkt des Bogens gelegt. Der Bogen b wird in zwei symmetrische Stränge geteilt, wovon nur der rechte Strang betrachtet wird. Die Spannkraft des Bogens als tangential wirkende, resultierende Kraft $T(x)$ kann in jedem Punkt in eine horizontale Kraft $F_H(x) = H$ und eine vertikale Kraft $F_V(x) = V$ zerlegt werden. Die Horizontalkraft H ist in jedem Bogenpunkt stets gleich groß. Mit zunehmender Höhe eines betrachteten Punktes, erhöht sich auch die Kraft V, da mehr Bogenmasse/Last die Spannkraft vergrößert. Im Punkt O ist $T = H$. Wird μ als Bogenmasse je Meter bezeichnet, g als Ortskonstante und $s(x)$ als Länge des Seils vom Punkt O bis zu einem höher gelegenen Punkt P kann V definiert werden.
Es ist $\quad V(x) = \mu(x) \cdot g \cdot s(x),$

mit $s(x) = \int\limits_0^{x_P} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,\qquad V(x) = \mu(x) \cdot g \cdot \int\limits_0^{x_P} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ ...(1).

Eine weitere Möglichkeit, die wirkenden Kräfte darzustellen, erlaubt der Tangens

$tan\ \alpha = \frac{V(x)}{H}$, mit (1) $\quad tan\ \alpha = \frac{\mu(x)\cdot g}{H} \cdot \int_0^{x_P} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$

Es ist $tan\ \alpha = y'$ $\quad y' = \frac{\mu(x)\cdot g}{H} \cdot \int_0^{x_P} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \quad y' = \frac{\mu(x)\cdot g}{H} \cdot \int_0^{x_P} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ ...(2).

Die Ableitung von (2) ist $y'' = \frac{\mu(x)\cdot g}{H} \cdot \sqrt{1+y'^2}$ ...(3).

Mit zunehmender Bogenlänge erhöht sich die Last μ auf die Querschnittsfläche A des Bogens, so dass $A(x) = \frac{\mu(x)}{\rho}$ mit ρ als Dichte des Bogens. $T(x)$ kann mit dem Satz von Pythogoras $T(x) = \sqrt{H^2 + V(x)^2}$ beschrieben werden.

Dann ist die Spannung $\quad \sigma = \frac{T(x)}{A(x)}, \quad \sigma = \rho \cdot \frac{\sqrt{H^2+V(x)^2}}{\mu(x)}$ ...(4),

mit $V(x) = y' \cdot H$ $\quad \sigma = \rho \cdot \frac{\sqrt{H^2+y'^2\cdot H^2}}{\mu(x)}, \quad \sigma = \frac{H\cdot\rho}{\mu(x)} \cdot \sqrt{1+y'^2},$

$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{H}{\mu(x)} \cdot \sqrt{1+y'^2}, \quad \frac{\mu(x)}{H} = \frac{\rho}{\sigma} \cdot \sqrt{1+y'^2}$ ...(5),

(5) in (3) mit $\quad y'' = \frac{g\cdot\rho}{\sigma} \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot \sqrt{1+y'^2}, \quad y'' = \frac{g\cdot\rho}{\sigma} \cdot \left(1+y'^2\right)$ ...(6).

Die Spannung σ auf den Bogen soll an allen Stellen konstant sein, so dass mit den Konstanten $\frac{\sigma}{g\cdot\rho} = a$ in (6) $\quad y'' = \frac{1}{a} \cdot \left(1+y'^2\right), \quad \underline{\underline{a \cdot y'' = 1 + y'^2}}$ ...(7).

(7) ist die Differentialgleichung für einen spannungsgleichen Bogen.

Probe: Man setzt $\quad y' = tan\ \frac{x}{a}$ ...(8) $\quad y'' = \frac{1}{a} \cdot \left(tan^2\frac{x}{a} + 1\right),$

y', y'' in (7) $\quad a \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(tan^2\frac{x}{a} + 1\right) = 1 + tan^2\frac{x}{a}, \quad tan^2\frac{x}{a} + 1 = 1 + tan^2\frac{x}{a}$ w.A.

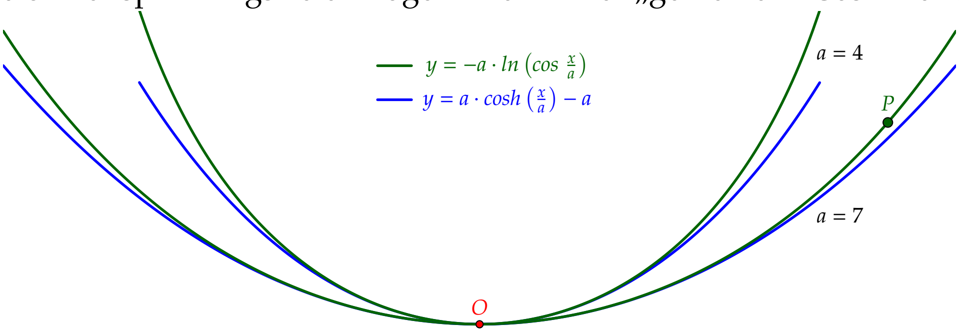
Die Funktionsgleichung des Bogens kann nun bestimmt werden.

Es ist $\quad \int y'\,dx = \int tan\frac{x}{a}\,dx \quad y = -a \cdot ln\left(cos\ \frac{x}{a}\right) + c,$

mit $c = 0$ $\quad \underline{\underline{y = -a \cdot ln\left(cos\ \frac{x}{a}\right)}}$ ...(9).

Ein spannungsgleicher Bogen besitzt die Funktionsgleichung $y = -a \cdot ln\left(cos\ \frac{x}{a}\right)$ für $-\frac{\pi}{2} \cdot a < x < \frac{\pi}{2} \cdot a$. An den Stellen $-\frac{\pi}{2} \cdot a$ und $\frac{\pi}{2} \cdot a$ befinden sich senkrechte Asymptoten, deren Abstand $\Delta x = a \cdot \pi$ ist. Damit kann a abgeschätzt werden.

3. Vergleich der spannungsfreien Bogenlinie mit der „gemeinen“ Cosh-Kettenlinie



4. Länge des spannungsfreien Bogens $\overset{\frown}{OP}$

Es ist mit (8) $\quad s(x) = \int_0^{x_P} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \quad s(x) = \int_0^{x_P} \sqrt{1+tan^2\frac{x}{a}}\,dx,$

mit $tan\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$ $\quad s(x) = \int_0^{x_P} \sqrt{1+\left(\frac{sin\ \frac{x}{a}}{cos\ \frac{x}{a}}\right)^2}\,dx, \quad s(x) = \int_0^{x_P} \sqrt{\frac{cos^2\frac{x}{a}+sin^2\frac{x}{a}}{cos^2\frac{x}{a}}}\,dx,$

$arctanh\left(sin\ \frac{0}{a}\right) = 0$ $\quad s(x) = \int_0^{x_P} \frac{1}{cos\ \frac{x}{a}}\,dx, \quad \underline{\underline{s(x) = a \cdot arctanh\left(sin\ \frac{x_P}{a}\right)}}$ ...(10).

Die Bogenlinie vom Punkt O bis zum Punkt P des spannungsgleichen Bogens hat eine Länge von $s(x) = a \cdot arctanh\left(sin\ \frac{x_P}{a}\right)$.

5. Querschnittsänderung des spannungsgleichen Bogens

Damit die Spannungsgleichheit gewährleistet wird, muss sich, mit zunehmender Länge, der Querschnitt A des Bogens vergrößern. Ausgehend von

(4) ist $\quad A(x) = \frac{T(x)}{\sigma}, \quad A(x) = \frac{\sqrt{H^2+V(x)^2}}{\sigma},$

mit $\sigma = a \cdot g \cdot \rho$, $V(x) = y' \cdot H$ $\quad A(x) = \frac{\sqrt{H^2+H^2 \cdot y'^2}}{a \cdot g \cdot \rho}, \quad A(x) = \frac{H}{a \cdot g \cdot \rho} \cdot \sqrt{1+y'^2},$

$y' = tan\,\frac{x}{a}$, $\sqrt{1+tan^2\frac{x}{a}} = \frac{1}{cos\,\frac{x}{a}}$ $\quad A(x) = \frac{H}{a \cdot g \cdot \rho} \cdot \sqrt{1+tan^2\frac{x}{a}}, \quad A(x) = \frac{H}{a \cdot g \cdot \rho \cdot \cos\,\frac{x}{a}}$ ...(11).

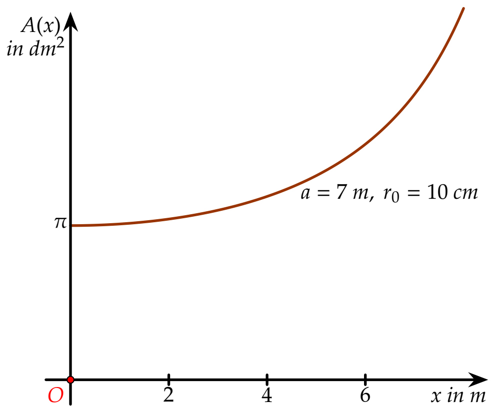
Mit $A(0) = A_0$ in (11) $\quad A(0) = \frac{H}{a \cdot g \cdot \rho \cdot \cos\,\frac{0}{a}}, \quad A_0 = \frac{H}{a \cdot g \cdot \rho},$

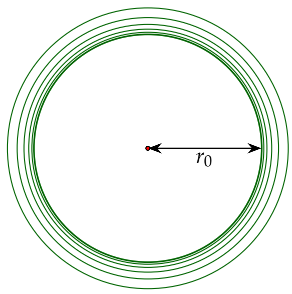
$H = A_0 \cdot a \cdot g \cdot \rho$ ...(12),

(12) in (11) $\quad A(x) = \frac{A_0 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{g} \cdot \cancel{\rho}}{\cancel{a} \cdot \cancel{g} \cdot \cancel{\rho} \cdot \cos\,\frac{x}{a}}, \quad A(x) = A_0 \cdot sec\,\frac{x}{a}.$

Angenommen, die Flächen des Bogens sind Kreise, dann ist die kleinste Fläche mit dem Radius r_0 $\quad A(x) = \pi \cdot r_0^2 \cdot sec\,\frac{x}{a}.$

Die Radien der Kreisbögen vergrößern sich, um spannungsgleich zu bleiben, sie sind $\quad \cancel{\pi} \cdot r(x)^2 = \frac{\cancel{\pi} \cdot r_0^2}{cos\,\frac{x}{a}}, \quad r(x) = \frac{r_0}{\sqrt{cos\,\frac{x}{a}}}.$





Radien $r(x)$, $0 \le x \le 6$, $x \in \mathbb{N}$

6. Beispielrechnung

gegeben: Abstand der Asymptoten von (9): $\Delta x = 22\,m$, $\Rightarrow$ $a = 7\,m$,
Dichte eines Stahlbogens $\rho = 7{,}85\frac{g}{cm^3}$,
Ortsfaktor $g = 9{,}81\frac{N}{kg}$, Ausgangsradius $r_0 = 50\,cm$

1. Berechnung von H in O: $\quad H = A_0 \cdot a \cdot g \cdot \rho, \quad H = \pi \cdot (50\,cm)^2 \cdot 7\,m \cdot 9{,}81\frac{N}{kg} \cdot 7{,}85\frac{g}{cm^3},$

$\underline{\underline{H = 423{,}38\,kN.}}$

2. Berechnung von σ in O: $\quad \sigma = \frac{H}{A_0}, \quad \sigma = \frac{\cancel{A_0} \cdot a \cdot g \cdot \rho}{\cancel{A_0}},$

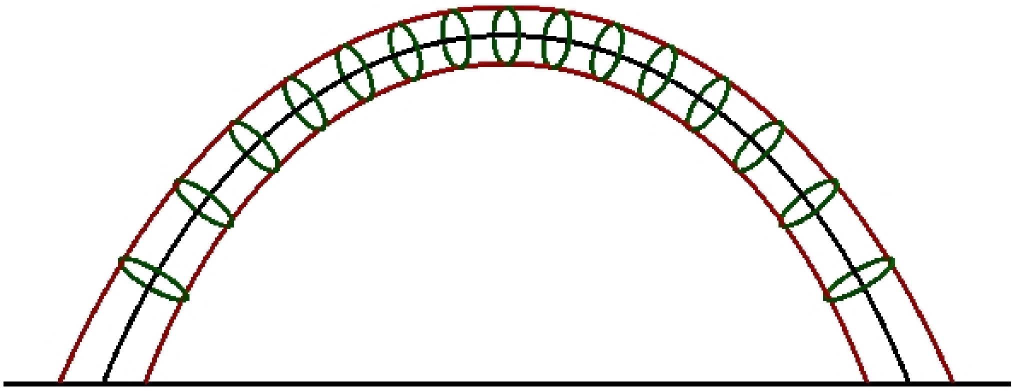
$\sigma = 7\,m \cdot 9{,}81\frac{N}{kg} \cdot 7{,}85\frac{g}{cm^3}, \quad \underline{\underline{\sigma = 539{,}06\,kPa.}}$

3. Berechnung von Größen in sechs ausgewählten Punkten

x in m	y in m	H in kN	r in cm	A in dm^2	V in kN	T in kN	σ in kPa
0	0	423.38	50	78.540	0	423.38	539.06
1	0.0717	423.38	50.257	79.348	60.897	427.73	539.06
2	0.2897	423.38	51.045	81.858	124.37	441.26	539.06
3	0.6636	423.38	52.427	86.349	193.44	465.47	539.06
4	1.2111	423.38	54.518	93.374	272.23	503.34	539.06
5	1.9621	423.38	57.522	103.95	367.07	560.35	539.06
6	2.9661	423.38	61.799	119.98	488.94	646.77	539.06

7. Auf dem Kopf stehende Kurve

Die Funktion (9) (schwarz) wird auf den Kopf gestellt. Es entsteht ein Bogen durch die Mittelpunkte der Kreise, senkrecht zu einer gedachten Tangente.



Gateway Arch unter `https://en.wikipedia.org/wiki/Gateway_Arch`:
Der Gateway Arch ist ein 192 m hohes Denkmal in St. Louis, Missouri, USA. Mit Edelstahl verkleidet und in Form eines beschwerten Bogens gebaut, ist er der höchste Bogen der Welt und das höchste zugängliche Gebäude in Missouri. Einige Quellen betrachten es als das höchste von Menschenhand geschaffene Monument der westlichen Hemisphäre. Erbaut als Denkmal für die Expansion der Vereinigten Staaten nach Westen und offiziell dem „amerikanischen Volk“ gewidmet, wird der Bogen allgemein als „Das Tor zum Westen“ bezeichnet. Er wurde 1947 vom finnisch-amerikanischen Architekten Eero Saarinen entworfen. Der Bau begann am 12. Februar 1963 und wurde am 28. Oktober 1965 abgeschlossen. Die Gesamtkosten betrugen 13 Millionen US-Dollar. Das Denkmal wurde am 10. Juni 1967 der Öffentlichkeit zugänglich gemacht.

Bild von Daniel Schwen vom 22. März 2011