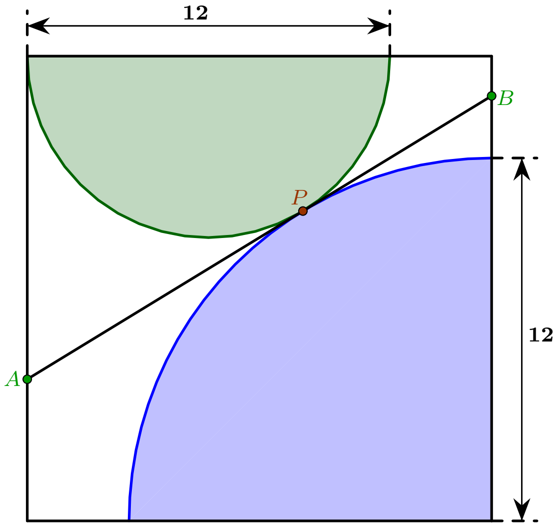
Tangente an zwei Kreise im Quadrat

Ein Halbkreis mit dem Durchmesser $d = 12\ LE$ und ein Viertelkreis mit dem Radius $r = 12\ LE$ berühren sich in einem Quadrat im Punkt P. Die Strecke $\overline{AB}$ liegt auf der gemeinsamen Tangente t an den beiden Kreisen durch P.

a) Wie groß ist der Flächeninhalt A des Quadrats?

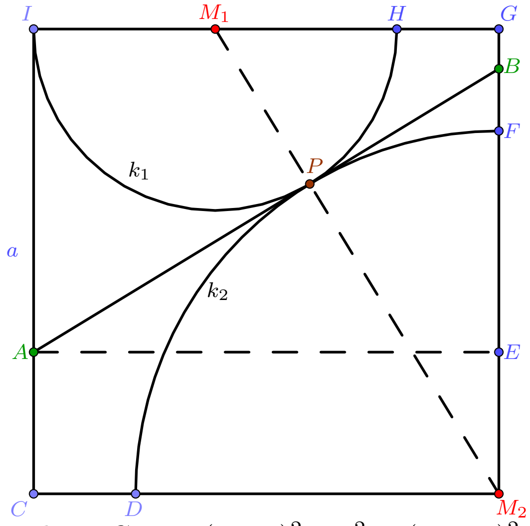
b) Welche Koordinaten hat der Punkt P?



Nach einer Aufgabe von Presh Talwalkar, im MindYourDecisions-Kanal, veröffentlicht am 05. Juni 2021

Lösung

a) Der Punkt C wird in den Koordinatenursprung gelegt, der Halbkreis mit dem Mittelpunkt M_1 sei k_1, der Viertelkreis mit dem Mittelpunkt M_2 sei k_2. Die rechtwinkligen Dreiecke ΔAEB und ΔM_2GM_1 sind nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent. Dann hat die Hypotenuse beider Dreiecke die Seitenlänge $\overline{AB} = \overline{M_1M_2}$, $\overline{AB} = 18\ LE$. Das Quadrat hat die Seitenlänge a.



Dann ist im Dreieck M_2GM_1	$(a-6)^2 + a^2 = (6+12)^2$,	$a^2 - 12 \cdot a + 36 + a^2 = 324$,
	$2 \cdot a^2 - 12 \cdot a - 288 = 0$,	$a^2 - 6 \cdot a - 144 = 0$,
negative Lösung entfällt	$a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+144}$,	$\underline{\underline{a = 3 + 3 \cdot \sqrt{17}}}$.
Der Flächeninhalt beträgt	$A = \left(3 \cdot \left(1+\sqrt{17}\right)\right)^2$,	$\underline{\underline{A = 18 \cdot \left(9+\sqrt{17}\right)}}$.

b) Der Kreis k_1 hat die Gleichung $(x-6)^2+(y-a)^2=36$,
der Kreis k_2 hat die Gleichung $(x-a)^2+y^2=144$.

k_1 : $\quad x^2-12\cdot x+36+y^2-2\cdot a\cdot y+a^2=36 \qquad$ ...(1),

k_2 : $\quad x^2-2\cdot a\cdot x+a^2+y^2=144 \qquad$ ...(2),

$(1)-(2) \quad -12\cdot x+36-2\cdot a\cdot y+2\cdot a\cdot x=-108$,

Gleichung der Tangente t: $\quad 6\cdot x+a\cdot y-a\cdot x=72, \qquad y=\frac{a-6}{a}\cdot x+\frac{72}{a} \qquad$ ...(3).

Gerade g durch M_1 und M_2: $\quad y=\frac{a}{6-a}\cdot(x-a) \qquad$ ...(4).

(3)=(4), $t\cap g=P$

$$\frac{a-6}{a}\cdot x+\frac{72}{a}=\frac{a}{6-a}\cdot(x-a),$$
$$x\cdot\left(\frac{a-6}{a}-\frac{a}{6-a}\right)=-\frac{a^2}{6-a}-\frac{72}{a},$$
$$x\cdot\frac{-(a-6)^2-a^2}{a\cdot(6-a)}=\frac{-a^3-432+72\cdot a}{a\cdot(6-a)}, \qquad x=\frac{a^3-72\cdot a+432}{2\cdot a^2-12\cdot a+36},$$

mit $a=3\cdot(1+\sqrt{17})$

$$x=\frac{\left(3\cdot(1+\sqrt{17})\right)^3-72\cdot 3\cdot(1+\sqrt{17})+432}{2\cdot\left(3\cdot(1+\sqrt{17})\right)^2-36\cdot(1+\sqrt{17})+36},$$
$$x=\frac{27\cdot(52+20\cdot\sqrt{17})-216-216\cdot\sqrt{17}+432}{324+36\cdot\sqrt{17}-36-36\cdot\sqrt{17}+36},$$
$$x=\frac{1404+540\cdot\sqrt{17}-216\cdot\sqrt{17}+216}{324},$$
$$x=\frac{1620+324\cdot\sqrt{17}}{324}, \qquad \underline{\underline{x_P=5+\sqrt{17}}}.$$

$x_P,\ a$ in (4)

$$y=\frac{3+3\cdot\sqrt{17}}{6-(3+3\cdot\sqrt{17})}\cdot\left(5+\sqrt{17}-(3+3\cdot\sqrt{17}\right),$$
$$y=\frac{3+3\cdot\sqrt{17}}{3-3\cdot\sqrt{17}}\cdot\left(2-2\cdot\sqrt{17}\right), \qquad y=\frac{6-6\cdot\sqrt{17}+6\cdot\sqrt{17}-6\cdot 17}{3-3\cdot\sqrt{17}},$$
$$y=\frac{-96}{3\cdot(1-\sqrt{17})}, \qquad y=\frac{-32}{1-\sqrt{17}}\cdot\frac{1+\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}},$$
$$y=\frac{-32\cdot(1+\sqrt{17})}{-16}, \qquad \underline{\underline{y_P=2\cdot(1+\sqrt{17})}}.$$

Der Punkt P hat die Koordinaten $P\left(5+\sqrt{17}\mid 2\cdot(1+\sqrt{17})\right)$.