Treffen sich zwei Rechtrecke

Finde zwei Rechtecke, deren Seitenlängen natürliche Zahlen sind, auf die dieser Dialog zutrifft.

Aufgabe 1299 von Christoph Siewert, Bornheim, im Heft „Monoid“ vom Juni 2022

Lösung

Das linke Rechteck sei R_l mit den Seitenlängen a und b, das rechte Rechteck sei R_r mit den Seitenlängen c und d.

Dann ist	$a \cdot b = 2 \cdot c \cdot d$		...(1),
und	$2 \cdot (a+b) = c+d$,	$d = 2 \cdot (a+b) - c$	...(2),
(2) in (1)	$a \cdot b = 2 \cdot c \cdot (2 \cdot (a+b) - c)$,	$a \cdot b = 4 \cdot a \cdot c + 4 \cdot b \cdot c - 2 \cdot c^2$,	
ordnen	$2 \cdot c^2 - 4 \cdot (a+b) \cdot c + a \cdot b = 0$,	$c^2 - 2 \cdot (a+b) \cdot c + \frac{a \cdot b}{2} = 0$,	
nach c auflösen	$c_{1,2} = a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - \frac{a \cdot b}{2}}$,	$c_{1,2} = a+b \pm \sqrt{a^2 + \frac{3}{2} \cdot a \cdot b + b^2}$	...(3).
Da $(a,b,c) \in \mathbb{N}$, ist	$q^2 = a^2 + \frac{3}{2} \cdot a \cdot b + b^2$	mit $q \in \mathbb{N}$	...(4).
Substitution:	$z = a + \frac{3}{4} \cdot b$		...(5),
	$z^2 = a^2 + \frac{3}{2} \cdot a \cdot b + \frac{9}{16} \cdot b^2$		...(6),
(4)-(5)	$q^2 - z^2 = b^2 - \frac{9}{16} \cdot b^2$,	$(q+z) \cdot (q-z) = \frac{7}{16} \cdot b^2$	...(7).

In der Gleichung (7) sind $(b, q) \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{Q}$. Nun kann mit (7) systematisch probiert werden, bis die Produkte „passen“.

a) I $q + z = \frac{7}{16}$,	I+II: $2 \cdot q = \frac{7}{16} + b^2$,	$q = \frac{7}{32} + \frac{b^2}{2}$, $q \notin \mathbb{N}$.
II $q - z = b^2$		
b_1) I $q + z = 7$,	I+II: $2 \cdot q = 7 + \frac{b^2}{16}$,	$b = 4$, $q = 4$,
II $q - z = \frac{b^2}{16}$	$\Rightarrow b,\ q$ in (7),	$z = 3$,
	$\Rightarrow b,\ z$ in (5),	$a = 0$, R_l nicht kontruierbar.
b_2) I $q + z = 7$,	I+II: $2 \cdot q = 7 + \frac{b^2}{16}$,	$b = 8$, $q = \frac{11}{2}$, $q \notin \mathbb{N}$
II $q - z = \frac{b^2}{16}$		
c_1) I $q + z = \frac{7}{4}$,	I+II: $2 \cdot q = \frac{b^2+7}{4}$,	$b = 1$, $q = 1$,
II $q - z = \frac{b^2}{4}$	$\Rightarrow b,\ q$ in (7),	$z = \pm\frac{3}{4}$, $z = -\frac{3}{4}$ entfällt
	$\Rightarrow b,\ z$ in (5),	$a = 0$, R_l nicht kontruierbar.
c_2) I $q + z = \frac{7}{4}$,	I+II: $2 \cdot q = \frac{b^2+7}{4}$,	$b = 3$, $q = 2$,
II $q - z = \frac{b^2}{4}$	$\Rightarrow b,\ q$ in (7),	$z = \pm\frac{1}{4}$, $z = -\frac{1}{4}$ entfällt
	$\Rightarrow b,\ z$ in (5),	$a = -2$, $a \notin \mathbb{N}$.
c_3) I $q - z = \frac{7}{4}$,	I+II: $2 \cdot q = \frac{b^2+7}{4}$,	$b = 5$, $q = 4$,
II $q + z = \frac{b^2}{4}$	$\Rightarrow b,\ q$ in (7),	$z = \pm\frac{9}{4}$, $z = -\frac{9}{4}$ entfällt

	$\Rightarrow b,\ z$ in (5),	$a=-\frac{3}{2},\ a\notin\mathbb{N}$.	
c_4) I $q-z=\frac{7}{4}$,	I+II: $2\cdot q=\frac{b^2+7}{4}$,	$b=7,\ q=7$,	
II $q+z=\frac{b^2}{4}$	$\Rightarrow b,\ q$ in (7),	$z=\pm\frac{21}{4},\ z=-\frac{21}{4}$ entfällt	
	$\Rightarrow b,\ z$ in (5),	$a=0$, R_l nicht kontruierbar.	
c_5) I $q-z=\frac{7}{4}$,	I+II: $2\cdot q=\frac{b^2+7}{4}$,	$b=9,\ q=11$,	
II $q+z=\frac{b^2}{4}$	$\Rightarrow b,\ q$ in (7),	$z=\pm\frac{37}{4},\ z=-\frac{37}{4}$ entfällt	
	$\Rightarrow b,\ z$ in (5),	$a=\frac{5}{2},\ a\notin\mathbb{N}$.	
c_6) I $q-z=\frac{7}{4}$,	I+II: $2\cdot q=\frac{b^2+7}{4}$,	$b=11,\ q=16$,	
II $q+z=\frac{b^2}{4}$	$\Rightarrow b,\ q$ in (7),	$z=\pm\frac{57}{4},\ z=-\frac{57}{4}$ entfällt	
	$\Rightarrow b,\ z$ in (5),	$\underline{\underline{a=6}}$.	
Mit $a=6\ cm$, $b=11\ cm$ ist	$A_l=66\ cm^2$,	$u_l=34\ cm$,	
$\Rightarrow$	$A_r=33\ cm^2$,	$u_r=68\ cm$,	
a,b in (3)	$c_{1,2}=6+11\pm\sqrt{36+99+121}$,	$c_{1,2}=17\pm\sqrt{256}$,	
	$c_{1,2}=17\pm 16$,	$c_1=1$,	$c_2=33$,
	$d_{1,2}=\frac{u_r}{2}-c_{1,2}$,	$d_1=33$,	$d_2=1$.

Das linke Rechteck hat die Seitenlängen $a=6\ cm$ und $b=11\ cm$, das rechte Rechteck die Seitenlängen $c=1\ cm$ und $d=33\ cm$.

Das Programm Mathematica findet die Lösung schnell mit den Befehlen
gl1=FindInstance[$ab=2c(2a+2b-c)\wedge a<b,\{a,b,c\},\mathbb{Z}_{>0}$]
$\{\{a\to 6, b\to 11, c\to 1\}\}$
$d=\frac{\text{gl1[[1,1,2]]gl1[[1,2,2]]}}{\text{2gl1[[1,3,2]]}}$
33

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, aus c_6) die Zahl q zu eliminieren.

mit II-I	$2\cdot z=\frac{b^2-7}{4}$,	$b^2=8\cdot z-7$,
mit (5)	$b^2=8\cdot\left(a+\frac{3}{4}\cdot b\right)-7$,	$b^2-6\cdot b+7=8\cdot a$,
	$(b+1)\cdot(b-7)=8\cdot a$,	
$\Rightarrow b>7$	$b=8,\ a=\frac{9}{8},\ a\notin\mathbb{N}$,	$b=9,\ a=\frac{5}{2},\ a\notin\mathbb{N}$,
	$b=10,\ a=\frac{33}{8},\ a\notin\mathbb{N}$,	$\underline{\underline{b=11}},\ \underline{\underline{a=6}},\ (a,b)\in\mathbb{N}$.

Das Programm Python findet in 50 Sekunden für Rechteckseitenlängen ℓ zwischen $1\leq\ell\leq 100$ 32 mögliche Rechteckpaare, die die Bedingungen erfüllen (ohne Dopplungen, siehe unten).

```
m=0;n=100
for a in range(1,n+1):
    for b in range(1,n+1):
        for c in range(1,n+1):
            for d in range(1,n+1):
                if a*b==2*c*d and 2*(a+b)==c+d:
                    m+=1;print(m,a,b,c,d,a*b,c*d,2*(a+b),2*(c+d))
```

$Nr.$	a	b	c	d	A_l	A_r	u_l	u_r	$Nr.$	a	b	c	d	A_l	A_r	u_l	u_r
1	5	18	1	45	90	45	46	92	9	18	33	3	99	594	297	102	204
2	6	11	1	33	66	33	34	68	10	19	30	3	95	570	285	98	196
3	10	36	2	90	360	180	92	184	11	21	26	3	91	546	273	94	188
4	11	6	1	33	66	33	34	68	12	22	12	2	66	264	132	68	136
5	12	22	2	66	264	132	68	136	13	26	21	3	91	546	273	94	188
6	15	16	2	60	240	120	62	124	14	30	19	3	95	570	285	98	196
7	16	15	2	60	240	120	62	124	15	33	18	3	99	594	297	102	204
8	18	5	1	45	90	45	46	92	16	36	10	2	90	360	180	92	184