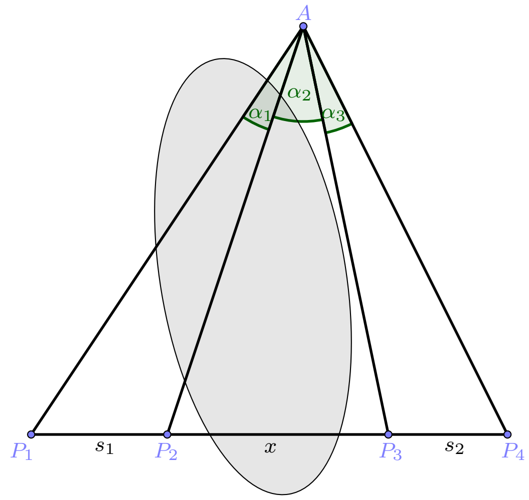
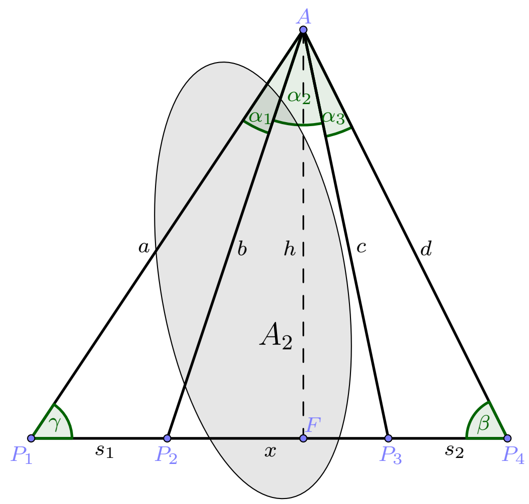
Unzugängliche Strecke im Dreieck

Die Länge der nicht zugänglichen Strecke $x = \overline{P_2P_3}$ soll ermittelt werden.
Messbar sind auf Grund der Geländeverhältnisse die Strecken $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_3P_4}$, wobei P_1 und P_4 auf den Verlängerungen von $\overline{P_2P_3}$ liegen, und die Winkel α_1, α_2 und α_3.



Aufgabe Nr.26/1962 von Wolfgang Hegenwald, Schönebeck, in „Unsere Mathematikaufgabe“ aus der Zeitschrift „Wissenschaft und Fortschritt“

Lösung



Das Dreieck ΔP_2P_3A besitzt den Flächeninhalt A_2. Das Dreieck ΔP_1P_4A hat die Innenwinkel $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, β und γ bei den Punkten A, P_4 und P_1, seine Höhe sei h. Der Sinussatz

im Dreieck ΔP_1P_2A liefert $\quad \frac{b}{s_1} = \frac{sin\ \gamma}{sin\ \alpha_1}, \quad b = \frac{s_1 \cdot sin\ \gamma}{sin\ \alpha_1}$ ...(1),

und im Dreieck ΔP_3P_4A $\quad \frac{c}{s_2} = \frac{sin\ \beta}{sin\ \alpha_3}, \quad c = \frac{s_2 \cdot sin\ \beta}{sin\ \alpha_3}$ ...(2).

Im Dreieck ΔFP_4A ist $\quad sin\ \beta = \frac{h}{d}, \quad \frac{1}{d} = \frac{sin\ \beta}{h}$ ...(3).

Flächengleichheit von A_2: $\quad \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot sin\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h, \quad x = \frac{b \cdot c \cdot sin\ \alpha_2}{h}$ ...(4),

(1), (2) in (4), dann (3) $\quad x = \frac{s_1 \cdot sin\ \gamma}{sin\ \alpha_1} \cdot \frac{s_2 \cdot sin\ \beta}{sin\ \alpha_3} \cdot \frac{sin\ \alpha_2}{h}, \quad x = \frac{s_1 \cdot sin\ \gamma}{sin\ \alpha_1} \cdot \frac{s_2}{sin\ \alpha_3} \cdot \frac{sin\ \alpha_2}{d},$

$\frac{sin\ \gamma}{d} = \frac{sin\ \alpha}{s_1+x+s_2}$

$$x = \frac{s_1 \cdot s_2 \cdot sin\ \alpha \cdot sin\ \alpha_2}{(s_1+x+s_2) \cdot sin\ \alpha_1 \cdot sin\ \alpha_3},$$

$$x^2 + (s_1+s_2) \cdot x - \frac{s_1 \cdot s_2 \cdot sin\ \alpha \cdot sin\ \alpha_2}{sin\ \alpha_1 \cdot sin\ \alpha_3} = 0,$$

$$x = -\frac{s_1+s_2}{2} + \sqrt{\frac{(s_1+s_2)^2}{4} + s_1 \cdot s_2 \cdot \frac{sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \cdot sin\ \alpha_2}{sin\ \alpha_1 \cdot sin\ \alpha_3}}.$$