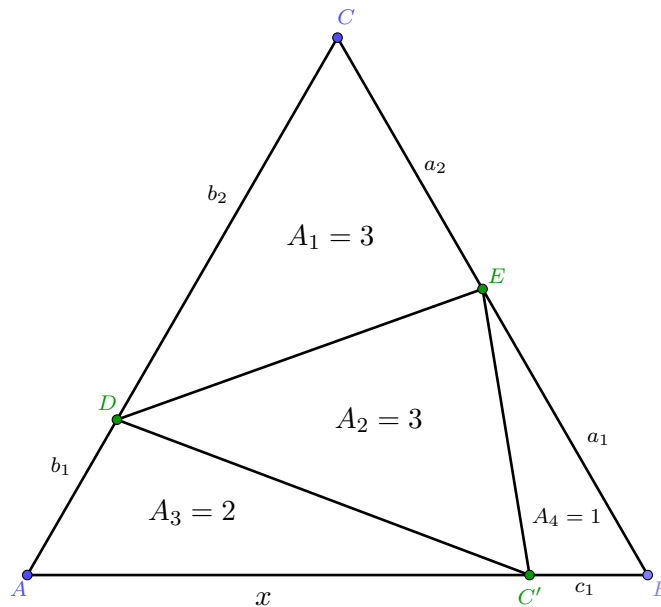


Vier Dreiecke im gleichseitigen Dreieck

Ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ wird durch eine Strecke \overline{DE} so geteilt, dass bei einer Spiegelung der Punktes C an \overline{DE} der Bildpunkt C' genau auf die Strecke \overline{AB} fällt. Verbindet man C' mit den Punkten D und E , so entstehen innerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$ vier Dreiecke. Die Flächeninhalte dieser Dreiecke ergeben für das Dreieck $\triangle DEC$ $A_1 = 3 FE$, für das Dreieck $\triangle C'ED$ $A_2 = 3 FE$, $\triangle AC'D$ $A_3 = 2 FE$ und für das Dreieck $\triangle C'BE$ $A_4 = 1 FE$.

- In welcher Entfernung x vom Punkt A muss der Punkt C' liegen, damit die Flächenverhältnisse eingehalten werden?
- Welche Koordinaten haben die Punkte D und E , wenn der Punkt A im Koordinatenursprung liegt?



Idee nach einer Aufgabe von Peter G. Nischke, Berlin

Lösung

- Der Flächeninhalt im Dreieck $\triangle ABC$ beträgt

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$A = 9$$

Im $\triangle AC'D$ ist

$$b_1 = a - b_2 \text{ in (2)}$$

Im $\triangle DEC$ ist

$$(3)=(4)$$

$$a_2 = a - a_1 \text{ in (5)}$$

Im $\triangle C'BE$ ist

$$(6)=(7)$$

$$a^2 = \frac{36}{\sqrt{3}}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot b_1 \cdot \sin(60^\circ),$$

$$a - b_2 = \frac{2 \cdot A_3}{x \cdot \sin(60^\circ)},$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot \sin(60^\circ),$$

$$a - \frac{2 \cdot A_3}{x \cdot \sin(60^\circ)} = \frac{2 \cdot A_1}{a_2 \cdot \sin(60^\circ)},$$

$$a_2 = \frac{2 \cdot A_1 \cdot x}{a \cdot x \cdot \sin(60^\circ) - 2 \cdot A_3}.$$

$$a - a_1 = \frac{2 \cdot A_1 \cdot x}{a \cdot x \cdot \sin(60^\circ) - 2 \cdot A_3},$$

$$A_4 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot c_1 \cdot \sin(60^\circ),$$

$$a - \frac{2 \cdot A_1 \cdot x}{a \cdot x \cdot \sin(60^\circ) - 2 \cdot A_3} = \frac{2 \cdot A_4}{c_1 \cdot \sin(60^\circ)},$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h,$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}.$$

$$a = 2 \cdot \sqrt[4]{27} \quad \dots(1)$$

$$b_1 = \frac{2 \cdot A_3}{x \cdot \sin(60^\circ)}. \quad \dots(2)$$

$$b_2 = a - \frac{2 \cdot A_3}{x \cdot \sin(60^\circ)}. \quad \dots(3)$$

$$b_2 = \frac{2 \cdot A_1}{a_2 \cdot \sin(60^\circ)}. \quad \dots(4)$$

$$a \cdot x \cdot \sin(60^\circ) - 2 \cdot A_3 = \frac{2 \cdot A_1 \cdot x}{a_2}, \quad \dots(5)$$

$$a_1 = a - \frac{2 \cdot A_1 \cdot x}{a \cdot x \cdot \sin(60^\circ) - 2 \cdot A_3}. \quad \dots(6)$$

$$a_1 = \frac{2 \cdot A_4}{c_1 \cdot \sin(60^\circ)}. \quad \dots(7)$$

mit Flächenwerten

$$a^2 \cdot \sin(60^\circ) = 2 \cdot A$$

$$a \cdot \sin(60^\circ) = h$$

$$a \cdot h = 2 \cdot A$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

zusammenfassen

$$| : (-6 \cdot \sqrt{3})$$

mit (1)

negative Lösung entfällt

Wenn x eine Länge von $x = \frac{\sqrt[4]{3}}{6} \cdot (7 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{19})$ hat, werden alle Flächenvorgaben eingehalten.

b) Mit (7) $a_1 = \frac{2}{(a-x) \cdot \sin(60^\circ)}$ kann a_1 bestimmt werden, dann ist $\overrightarrow{OE} = \frac{a_1}{a} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Mit (2) $b_1 = \frac{4}{x \cdot \sin(60^\circ)}$ kann b_1 bestimmt werden, dann ist $\overrightarrow{OD} = \frac{b_1}{a} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Die Punkte für die teilende Linie \overline{DE} sind $D(0,63874 \mid 1,10634)$ und $E(3,33514 \mid 2,1190)$.

$$a^2 \cdot x \cdot \sin(60^\circ) - 2 \cdot a \cdot A_3 - 2 \cdot A_1 \cdot x = \frac{2 \cdot A_4 \cdot a \cdot x \cdot \sin(60^\circ) - 4 \cdot A_3 \cdot A_4}{c_1 \cdot \sin(60^\circ)},$$

$$a^2 \cdot x \cdot \sin(60^\circ) - 4 \cdot a - 6 \cdot x = \frac{2 \cdot a \cdot x \cdot \sin(60^\circ) - 8}{c_1 \cdot \sin(60^\circ)},$$

$$18 \cdot x - 4 \cdot a - 6 \cdot x = \frac{2 \cdot a \cdot x \cdot \sin(60^\circ) - 8}{(a-x) \cdot \sin(60^\circ)},$$

$$12 \cdot x - 4 \cdot a = \frac{2 \cdot h \cdot x - 8}{h - x \cdot \sin(60^\circ)},$$

$$(12 \cdot x - 4 \cdot a) \cdot (h - x \cdot \sin(60^\circ)) = 2 \cdot h \cdot x - 8,$$

$$12 \cdot h \cdot x - 12 \cdot x^2 \cdot \sin(60^\circ) - 4 \cdot a \cdot h + 4 \cdot a \cdot x \cdot \sin(60^\circ) = 2 \cdot h \cdot x - 8,$$

$$10 \cdot h \cdot x - 12 \cdot x^2 \cdot \sin(60^\circ) - 4 \cdot a \cdot h + 4 \cdot a \cdot x \cdot \sin(60^\circ) = -8,$$

$$10 \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot x - 12 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - 64 + 4 \cdot a \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 0,$$

$$5 \cdot \sqrt{3} \cdot a \cdot x - 6 \cdot \sqrt{3} \cdot x^2 - 64 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot a \cdot x = 0,$$

$$7 \cdot \sqrt{3} \cdot a \cdot x - 6 \cdot \sqrt{3} \cdot x^2 - 64 = 0,$$

$$x^2 - \frac{7}{6} \cdot a \cdot x + \frac{32}{3 \cdot \sqrt{3}} = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{7}{12} \cdot a \pm \sqrt{\frac{49}{144} \cdot a^2 - \frac{32}{3 \cdot \sqrt{3}}},$$

$$x_{1,2} = \frac{7}{12} \cdot a \pm \sqrt{\frac{49}{144} \cdot \frac{36}{\sqrt{3}} - \frac{32 \cdot 48}{144 \cdot \sqrt{3}}},$$

$$x_{1,2} = \frac{7}{12} \cdot a \pm \frac{1}{12 \cdot \sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{228},$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{12} \cdot \left(7 \cdot a \pm \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{57} \right),$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{12} \cdot \left(7 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{27} \pm \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{19} \right),$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{6} \cdot \left(7 \cdot \sqrt[4]{3^3} \pm \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{19} \right),$$

$$x = \frac{\sqrt[4]{3}}{6} \cdot (7 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{19}).$$