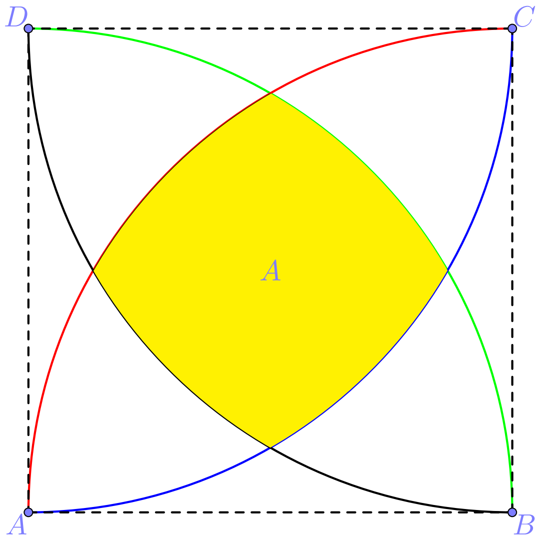
Vier Viertelkreise im Quadrat

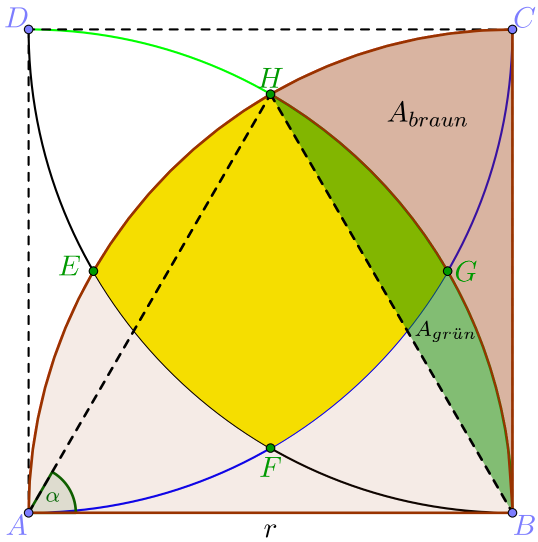
In einem Quadrat $\square ABCD$ sind die Eckpunkte jeweils Mittelpunkte von Viertelkreisen.
Welche Fläche A nimmt der Bereich ein, den alle vier Viertelkreise gemeinsam haben?



Aufgabe bei #*dailymaths*, gefunden von Andreas Grieser, Greifswald, vom 06. Dezember 2020

Lösung

a) Flächenbetrachtung 1



Die Punkte A, B und H bilden ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge r. Das Kreissegment $A_{grün}$ kann berechnet werden mit der Gleichung $\quad A_{grün} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot (\alpha - sin\ \alpha)$.

Dann ist mit $\alpha = 60°$ $\qquad A_{grün} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot (\frac{\pi}{3} - sin\ 60°)$, $\quad A_{grün} = r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}\right)$. ...(1).

Die Fläche A_{braun} entsteht aus der Differenz eines Zwölftelkreises und dem Kreissegment $A_{grün}$.

Es ist mit (1) $\qquad A_{braun} = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot r^2 - A_{grün}$, $\quad A_{braun} = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot r^2 - r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

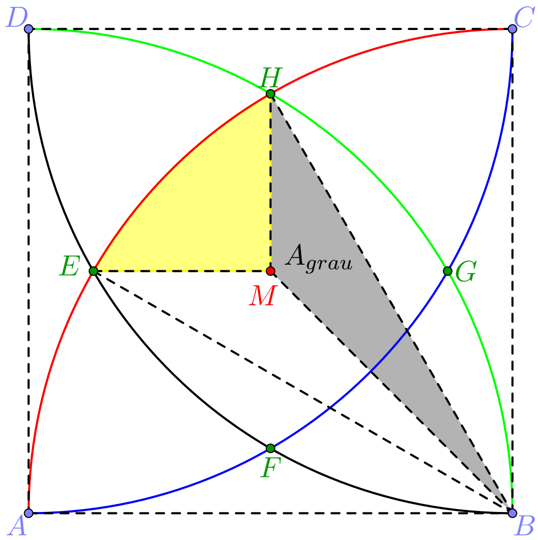
$A_{braun} = r^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}\right)$ ...(2).

Die gesuchte Fläche A kann nun bestimmt werden.

So ist mit (2) $\qquad A = r^2 - 4 \cdot A_{braun}$, $\qquad A = r^2 - 4 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}\right)$,

$\underline{\underline{A = r^2 \cdot \left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)}}$ $\qquad \frac{A}{A_{Quadrat}} = 31{,}515\ \%$

b) Flächenbetrachtung 2



Der Winkel $\sphericalangle MBH$ hat eine Größe von 15°. Zwei Seiten der grauen Dreiecksfläche sind der Radius r und die halbe Diagonale $e = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot r$ des Quadrats. Dann ist

mit $sin\ 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2 \cdot \sqrt{2}}$ $\qquad A_{grau} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot r \cdot sin\ 15°,$ $\qquad A_{grau} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot r \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2 \cdot \sqrt{2}},$

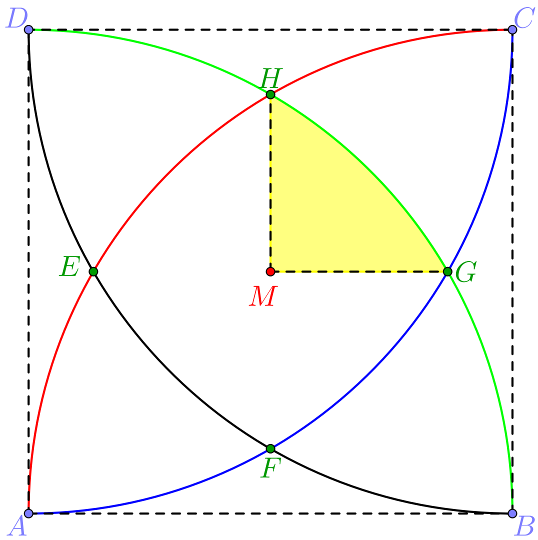
$A_{grau} = r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{8}$ ...(3).

Der Kreisausschnitt BHE, ebenfalls ein Zwölftelkreis, setzt sich aus zwei grauen Dreiecken und einem Viertel der gesuchten Fläche A zusammen,

so dass $\qquad \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{A}{4} + 2 \cdot A_{grau},$ $\qquad \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{A}{4} + 2 \cdot r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{8}$

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 = A + r^2 \cdot \sqrt{3} - 1$ $\qquad \underline{\underline{A = r^2 \cdot \left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)}}.$

c) Flächenberechnung durch ein Integral



Der Punkt A wird in den Koordinatenursprung gelegt. Die x-Koordinate vom Punkt G muss bestimmt werden. Der grüne Viertelkreisbogen hat die Gleichung $k_{grün} : x^2 + y^2 = r^2$.

Mit $y = \frac{r}{2}$, entsteht $\qquad k_{grün} : x^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2,$ $\qquad x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r,$

negative Lsg. entfällt $\qquad x(G) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r$ ...(4).

Integrationsgrenzen: $\qquad \frac{r}{2}$ $\qquad$ und $\qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r$ ...(5).

Dann ist mit (4) und (5) $\qquad \frac{A}{4} = \int\limits_{\frac{r}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r} \left(f_{grün}(x) - \frac{r}{2}\right) \cdot dx,$

$$A = 4 \cdot \int_{\frac{r}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx - 2 \cdot r \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r - \frac{r}{2} \right) \qquad ...(6).$$

Um die Stammfunktion von $\int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$ zu finden, muss substituiert werden. So wird mit $x = r \cdot sin\ \alpha$, $\alpha = arcsin(\frac{x}{r})$, $\alpha'(x) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ und $dx = \frac{d\alpha}{\alpha'}$.

Das ergibt $\int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx = \int \sqrt{r^2 - r^2 \cdot sin^2\alpha} \cdot \sqrt{r^2 - r^2 \cdot sin^2\alpha} \cdot d\alpha,$

$\int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx = r^2 \cdot \int (1 - sin^2\alpha) \cdot d\alpha,$

mit $1 - sin^2\alpha = cos^2\alpha$ $\quad \int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx = r^2 \cdot \int cos^2\alpha \cdot d\alpha,$

$cos^2\alpha = \frac{cos(2\alpha)+1}{2}$ $\quad \int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx = \frac{r^2}{2} \cdot \int (cos(2\alpha) + 1) \cdot d\alpha.$

Die Stammfunktion ist $\int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot sin(2\alpha) + \alpha \right) + c \qquad ...(7).$

obere Intervallgrenze: $\alpha = arcsin\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r}{r} \right), \qquad \alpha = arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \qquad ...(8)$

untere Intervallgrenze: $\alpha = arcsin\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot r}{r} \right), \qquad \alpha = arcsin\left(\frac{1}{2} \right) \qquad ...(9).$

(7), (8), (9) in (6) $\quad A = 4 \cdot \left(\frac{r^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot sin(2\alpha) + \alpha \right]_{arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}^{arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \right) - r^2 \cdot \left(\sqrt{3} - 1 \right),$

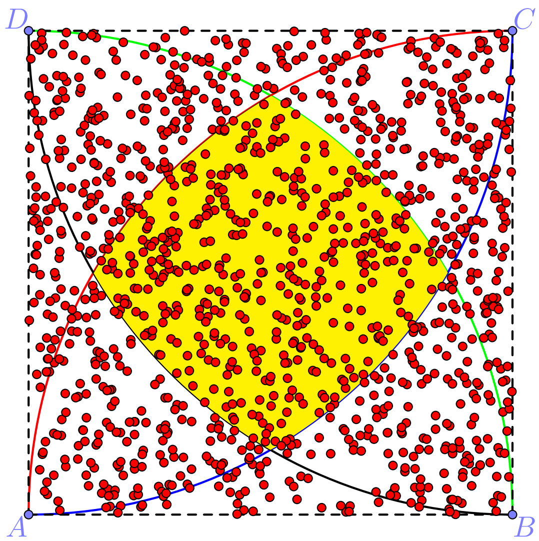
$2 \cdot arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$ $\quad A = r^2 \cdot \left[sin(2\alpha) + 2 \cdot \alpha \right]_{arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}^{arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - r^2 \cdot \left(\sqrt{3} - 1 \right),$

$2 \cdot arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 120°$ $\quad A = r^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 120° - \frac{\sqrt{3}}{2} - 60° \right) - r^2 \cdot \left(\sqrt{3} - 1 \right),$

$A = r^2 \cdot \left(60° - \sqrt{3} + 1 \right), \qquad \underline{\underline{A = r^2 \cdot \left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right)}}.$

d) Flächenbestimmung mit der Monte-Carlo-Methode

Es werden zufällig Punkte in das Quadrat gesetzt und die Punkte in der Fläche A ausgezählt. Je mehr Punkte gesetzt werden, um so genauer wird ein Näherungswert für den gelben Flächenanteil. Es ist $A = \frac{Anzahl\ der\ Punkte\ in\ der\ gelben\ Fläche}{Gesamzzahl\ der\ Punkte} \cdot r^2$.



In diesem Beispiel sind 384 von 1223 Punkten im gelben Flächenbereich, was einem Anteil von 31,4% entspricht.