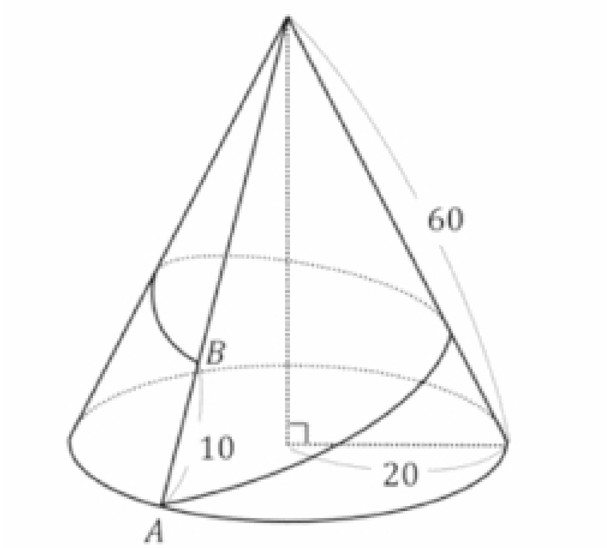
Weg auf dem Kegelmantel

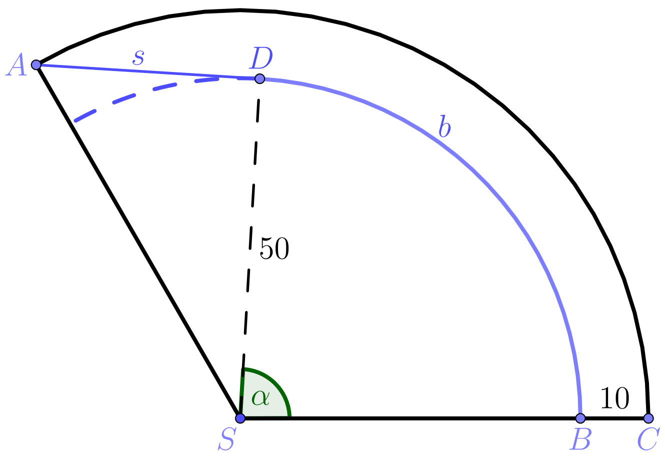
Wie lang ist der kürzeste Weg, der auf einer Kurve $\overline{BA}$ „nicht bergan“ geht.



Aufgabe aus https://www.zahlenjagd.at, Winteraufgabe 2020 vom 21.Dezember 2020

Lösung von Dr. Eugen Willerding

Der Kegelmantel wird zu einem Kreisektor aufgeschnitten. Bei den gegebenen Abmessungen beträgt der Öffnungswinkel 120°. Der blaue Weg beginnt auf einem Kreisbogen, dessen Radius so lange nicht verändert wird, bis eine Kreistangente durch A den Kreis in D schneidet.



Der Gesamtweg l ist	$l = b + s$,	
mit $b = 50 \cdot \alpha$, $sin(120° - \alpha) = \frac{s}{60}$	$l = 50 \cdot \alpha + 60 \cdot sin(120° - \alpha)$,	
notw. Bedingung: $l'(\alpha) = 0$,	$l'(\alpha) = 50 - 60 \cdot cos(120° - \alpha)$,	$50 = 60 \cdot cos(120° - \alpha)$,
$cos(120° - \alpha) = sin(\alpha - 30°)$	$\frac{5}{6} = sin(\alpha - 30°)$,	$\underline{\underline{\alpha_E = arcsin\ \frac{5}{6} + 30°}}$.
hinr. Bedingung $l''(\alpha_E) \neq 0$	$l''(\alpha) = -60 \cdot sin(120° - \alpha)$	$l''(\alpha_E) = -60 \cdot sin(90° - arcsin\ \frac{5}{6})$
	$l''(\alpha_E) = -60 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}$	$l''(\alpha_E) = -10 \cdot \sqrt{11} < 0$

Das bedeutet, dass für die minimale Strecke l der maximale Winkel α_E benötigt wird.

$\alpha_E = 86{,}44269°$ eingesezt in b	$b = 50 \cdot \alpha$,	$b = 75{,}43548\ LE$,
α_E eingesezt in s	$s = 60 \cdot sin(120° - \alpha)$,	$s = 33{,}16625\ LE$,
ergibt zusammen	$\underline{\underline{l = 108{,}60173\ LE}}$.	

Der kürzeste Weg, ohne bergan zu gehen, beträgt für eine Kegelumdrehung $l = 108{,}60173\ LE$.