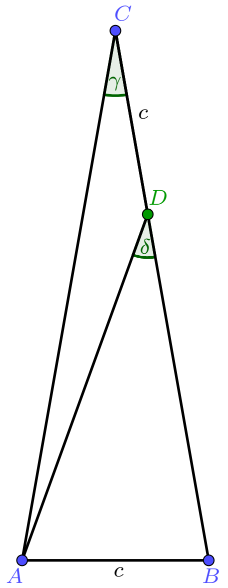
Winkel im gleichschenkligen Dreieck

In einem gleichschenkligen Dreieck ΔABC beträgt der Winkel an der Spitze $\gamma = 20°$. Auf der Seite $a = \overline{BC}$ befindet sich der Punkt D in der Entfernung $\overline{CD} = \overline{AB}$.

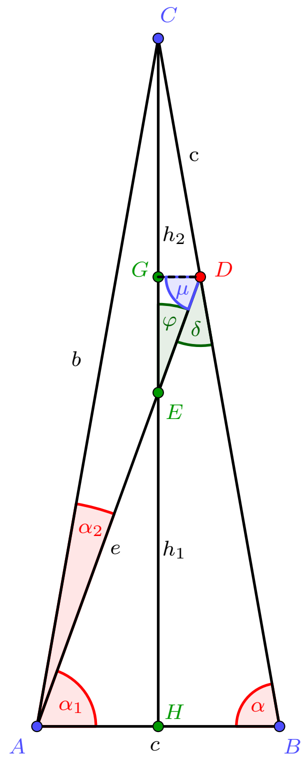
a) Wie groß ist der Winkel $\delta = \sphericalangle BDA$?

b) Welche Koordinaten hat der Punkt D in Abhängigkeit vom Winkel γ und der Basis c, wenn der Punkt A im Koordinatenursprung liegt?



Idee nach einer Aufgabe von Rainer Rosenthal aus der Newsgroup de.sci.mathematik

Lösung



a) Die Basiswinkel α und $\alpha_1 + \alpha_2$ des gleichschenkligen Dreiecks ΔABC sind $\alpha = 80°$ groß. ...(1)

Die Winkel α_1 und μ sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, es ist $\alpha_1 = \mu$. ...(2)

Im rechtwinkligen Dreieck ΔEDG gilt für die Winkel $\mu = 90° - \varphi$. ...(3)

Der Winkel δ ist ein Außwinkel des Dreiecks ΔEDC, er hat die Größe wie die Summe der beiden nichtanliegen Innenwinkel $\delta = \varphi + 10°$. ...(4)

Im Dreieck ΔAHE ist $cos\,(\alpha_1) = \frac{c}{2 \cdot e}$, $e = \frac{c}{2 \cdot cos(\alpha_1)}$. ...(5)

Im Dreieck ΔEDC ist $\frac{h_2}{c} = \frac{sin(\mu+\alpha)}{sin(\varphi)}$, $h_2 = \frac{sin(\mu+\alpha)}{sin(\varphi)} \cdot c$,

mit (2) und (3) $h_2 = \frac{sin(90°-\varphi+80°)}{sin(\varphi)} \cdot c$, $h_2 = \frac{sin(170°-\varphi)}{sin(\varphi)} \cdot c$. ...(6)

Im Dreieck ΔAEC ist $\frac{h_2}{e} = \frac{sin(\alpha_2)}{sin(10°)}$. ...(7)

(6):(5) liefert $\frac{h_2}{e} = \frac{\frac{sin(170°-\varphi)}{sin(\varphi)} \cdot c}{\frac{c}{2 \cdot cos(\alpha_1)}}$, $\frac{h_2}{e} = 2 \cdot \frac{sin(170°-\varphi) \cdot cos(\alpha_1)}{sin(\varphi)}$,

mit (2) und (3) $\frac{h_2}{e} = 2 \cdot \frac{sin(170°-\varphi) \cdot cos(90°-\varphi)}{sin(\varphi)}$, $\frac{h_2}{e} = 2 \cdot sin\,(170° - \varphi)$. ...(8)

(7)=(8) ergibt $\frac{sin(\alpha_2)}{sin(10°)} = 2 \cdot sin\,(170° - \varphi)$, $\frac{sin(\alpha-\alpha_1)}{2 \cdot sin(10°)} = sin\,(170° - \varphi)$,

mit (2) und (3) $\frac{sin(\varphi-10°)}{2 \cdot sin(10°)} = sin\,(170° - \varphi)$,

$sin\,(170° - \varphi) = sin\,(\varphi) + 10°$ $\frac{sin(\varphi-10°)}{2 \cdot sin(10°)} = sin\,(\varphi + 10°)$, $\frac{sin(\varphi+10°)}{sin(\varphi-10°)} = \frac{1}{2 \cdot sin(10°)}$,

$sin\,(30°) = \frac{1}{2}$ $\frac{sin(\varphi+10°)}{sin(\varphi-10°)} = \frac{sin(30°)}{sin(10°)}$, $\varphi = 20°$. ...(9)

(9) in (4) $\delta = 20° + 10°$, $\underline{\underline{\delta = 30°}}$.

Der Winkel δ hat eine Größe von 30°.

b) Im Dreieck ΔHBC ist $h = \frac{c \cdot tan(\alpha)}{2}$. ...(10)

Im Dreieck ΔGDC ist $\overline{CG} = c \cdot cos\,(10°)$ ...(11).

(10)-(11)

$$y(D) = h - \overline{CG},$$
$$y(D) = \frac{c \cdot tan(\alpha)}{2} - c \cdot cos\,(10°),$$
$$y(D) = c \cdot \left(\frac{tan(80°)}{2} - cos\,(10°)\right),$$

$\frac{sin(80°)}{cos(80°)} = \frac{cos(10°)}{sin(10°)}$

$$y(D) = c \cdot \left(\frac{cos(10°)}{2 \cdot sin(10°)} - cos\,(10°)\right),$$
$$\underline{\underline{y(D) = c \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) - cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right).}}$$

Im Dreieck ΔGDC ist $\overline{GD} = c \cdot sin\,(10°)$.

$x(D) = \frac{c}{2} + \overline{GD}$

$$x(D) = \frac{c}{2} + c \cdot sin\,(10°),$$
$$x(D) = c \cdot \left(\frac{1}{2} + sin\,(10°)\right),$$
$$\underline{\underline{x(D) = c \cdot \left(\frac{1}{2} + sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right).}}$$

Der Punkt D hat die Koordinaten $D\left(c \cdot \left(\frac{1}{2} + sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right) \middle| c \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) - cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)\right)$.