Aufgaben zum schrägen Wurf

Wenn in einer Wurfbewegung die anfängliche Geschwindigkeit (Wurfskraft) und die Dauer der Bewegung bekannt sind, daraus die Wurfsweite zu finden; oder, aus der Wurfsweite und der Dauer die Wurfskraft; oder aus der Wurfskraft und der Wurfsweite die Dauer der Bewegung zu bestimmen.

Aufgabe 95 aus dem Fragenkatalog für „Zöglinge der k.k. Theresianischen Ritter-Akademie“ von 1816 mit „Sätze(n) aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und den Kegelschnitten“, bereitgestellt von Jutta Gut, Wien

Lösung

Es wird von einem schrägen Wurf ausgegangen mit der Anfangshöhe $h = 0$. Die Abwurfgeschwindigkeit sei v_0 (Wurfskraft), der Abwurfwinkel α, die Wurfweite s_x, die Wurfhöhe s_y und t die Wurfzeit. Folgende Bewegungsgleichungen gelten:

$s_x = v_0 \cdot t \cdot cos\ \alpha \quad ...(1),$ $\qquad s_y = v_0 \cdot t \cdot sin\ \alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad ...(2).$

a) Die Wurfweite wird aus der Anfangsgeschwindigkeit und der Wurfzeit bestimmt:

Aus (1) wird $\quad v_0 \cdot cos\ \alpha = \frac{s_x}{t} \quad ...(3),$

mit (2) und $s_y = 0$ $\quad v_0 \cdot sin\ \alpha = \frac{g}{2} \cdot t \quad ...(4),$

(4):(3) $\quad tan\ \alpha = \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot s_x} \qquad \alpha = arctan\ \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot s_x} \quad ...(5),$

(5) in (1) $\quad s_x = v_0 \cdot t \cdot cos\left(arctan\ \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot s_x}\right) \quad ,$

$cos(arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} \quad s_x = v_0 \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{g \cdot t^2}{2 \cdot s_x}\right)^2}}, \qquad s_x = v_0 \cdot t \cdot \frac{2 \cdot s_x}{\sqrt{4 \cdot s_x^2 + g^2 \cdot t^4}},$

$\sqrt{4 \cdot s_x^2 + g^2 \cdot t^4} = 2 \cdot v_0 \cdot t, \qquad 4 \cdot s_x^2 + g^2 \cdot t^4 = 4 \cdot v_0^2 \cdot t^2$

negative Lösung entfällt $\quad s_x^2 = v_0^2 \cdot t^2 - \frac{g^2 \cdot t^4}{4}, \qquad \underline{\underline{s_x = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sqrt{4 \cdot v_0^2 - g^2 \cdot t^2}}}.$

b) Die Anfangsgeschwindigkeit wird aus der Wurfweite und der Wurfzeit bestimmt:

Aus (1) wird $\quad v_0 = \frac{s_x}{t \cdot cos\ \alpha},$

mit (5) $\quad v_0 = \frac{s_x}{t \cdot cos\left(arctan\ \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot s_x}\right)}, \qquad v_0 = \frac{\frac{s_x}{t}}{\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{g \cdot t^2}{2 \cdot s_x}\right)^2}}},$

$v_0 \cdot t = s_x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{g \cdot t^2}{2 \cdot s_x}\right)^2}, \qquad v_0^2 \cdot t^2 = s_x^2 \cdot \frac{4 \cdot s_x^2 + g^2 \cdot t^4}{4 \cdot s_x^2},$

negative Lösung entfällt $\quad \underline{\underline{v_0 = \sqrt{\frac{s_x^2}{t^2} + \frac{g^2 \cdot t^2}{4}}}}.$

c) Die Wurfdauer wird aus der Anfangsgeschwindigkeit und der Wurfweite bestimmt:

Aus (1) wird $\quad t = \frac{s_x}{v_0 \cdot cos\ \alpha},$

mit (5) $\quad t = \frac{s_x}{v_0 \cdot cos\left(arctan\ \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot s_x}\right)}, \qquad t = \frac{\frac{s_x}{v_0}}{\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{g \cdot t^2}{2 \cdot s_x}\right)^2}}},$

$v_0 \cdot t = s_x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{g \cdot t^2}{2 \cdot s_x}\right)^2}, \qquad v_0^2 \cdot t^2 = s_x^2 \cdot \frac{4 \cdot s_x^2 + g^2 \cdot t^4}{4 \cdot s_x^2},$

$t^4 - \frac{4 \cdot v_0^2}{g^2} \cdot t^2 + \frac{4 \cdot s_x}{g^2} = 0,$

Substitution $t^2 = z$ $\quad z^2 - \frac{4 \cdot v_0^2}{g^2} \cdot z + \frac{4 \cdot s_x}{g^2} = 0, \qquad z_{1,2} = \frac{2 \cdot v_0^2}{g^2} \pm \sqrt{\frac{4 \cdot v_0^4}{g^4} - \frac{4 \cdot s_x}{g^2}}$

$z_{1,2} = \frac{2 \cdot v_0^2}{g^2} \pm \frac{2}{g^2} \cdot \sqrt{v_0^4 - s_x^2 \cdot g^2}, \qquad z_{1,2} = \frac{2}{g^2} \cdot \left(v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - s_x^2 \cdot g^2}\right),$

Resubst., ohne pos. Lsg. $\quad \underline{\underline{t = \frac{\sqrt{2}}{g} \cdot \sqrt{v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - s_x^2 \cdot g^2}}}}.$