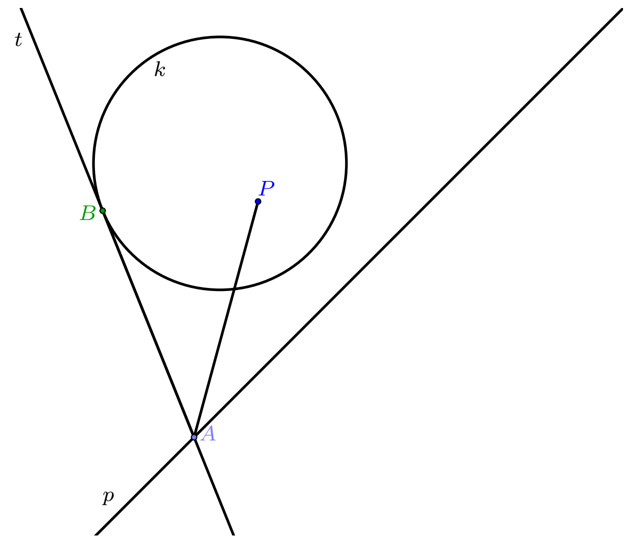
Der Zauberpunkt

Gegeben ist ein Kreis k. An den Kreis wird in B eine Tangente t gelegt. Eine Passante p schneidet die Tangente unterhalb des Kreises im Punkt A. Im Kreis befindet sich ein Zauberpunkt P.

a) Wie kann der Punkt P konstruiert werden, so dass immer gilt $\overline{AB} = \overline{AP}$, auch wenn A auf p verschoben wird?

b) Es ist zu beweisen, dass P fest liegt und $\overline{AB} = \overline{AP}$.

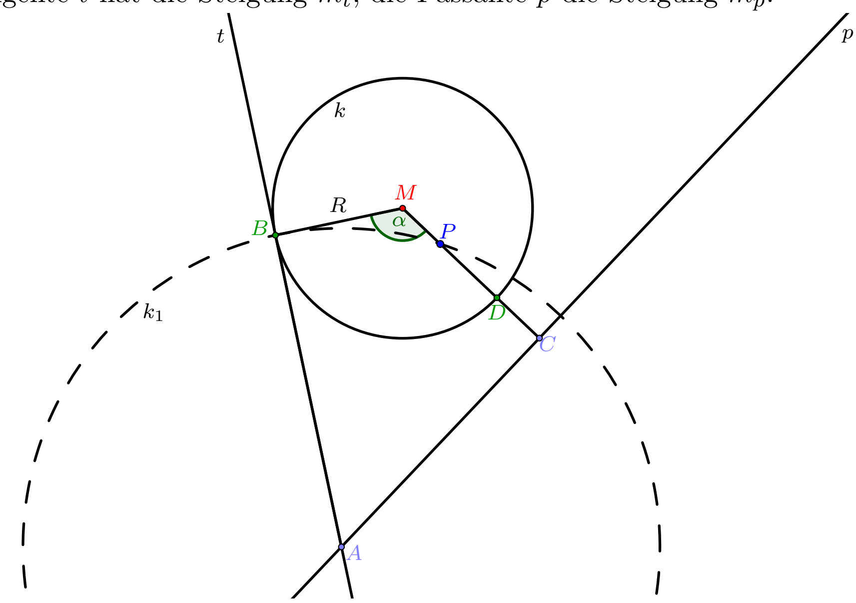
c) Welche Koordinaten hat der Zauberpunkt?



Aufgabe aus dem Buch „Mathematical Diamonds“ von Ross Honsberger, gefunden von Dr. Eugen Willerding am 14. Februar 2021

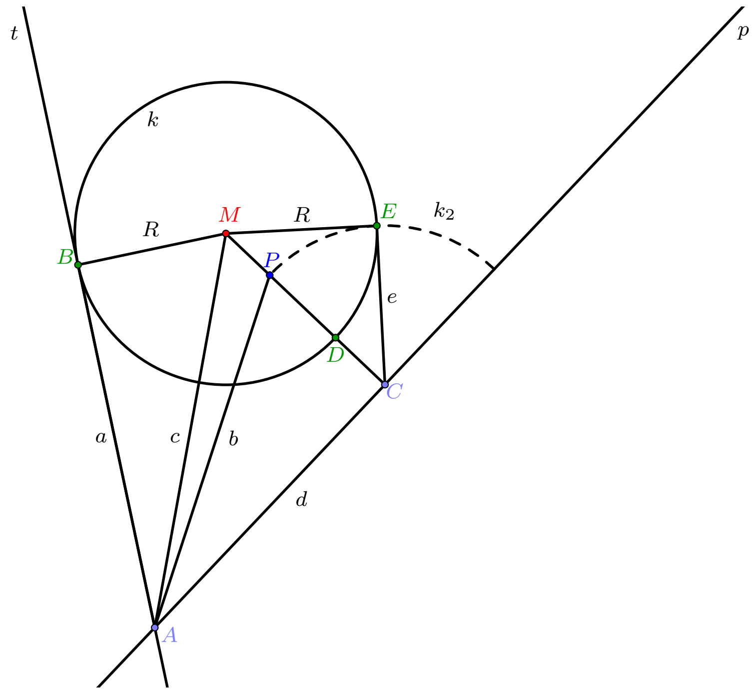
Lösung

a) Der Mittelpunkt M des Kreises wird in den Koordinatenursprung gelegt, der Radius von k sei R. Die Tangente t hat die Steigung m_t, die Passante p die Steigung m_p.



Dann ist $arctan(m_p) - arctan(m_t) = \alpha$.
α wird an R abgetragen. Damit ist $\overline{MC} \perp p$.
Ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AB}$ schneidet $\overline{MC}$ im Zauberpunkt P.

b)



Die Strecken $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AP}$, $c = \overline{AM}$ und $d = \overline{AC}$ werden festgelegt. Ein Kreisbogen k_2 mit dem Radius $e = \overline{CP}$ und dem Mittelpunkt C schneidet k in E. Dann ist

im Dreieck ΔAMB $\quad a^2 + R^2 = c^2$ ...(1),

im Dreieck ΔACM $\quad c^2 = \overline{CM}^2 + d^2$ ...(2),

(2) in (1) $\quad a^2 + R^2 = \overline{CM}^2 + d^2$ ...(3),

im Dreieck ΔCEM $\quad \overline{CM}^2 = e^2 + R^2$ ...(4),

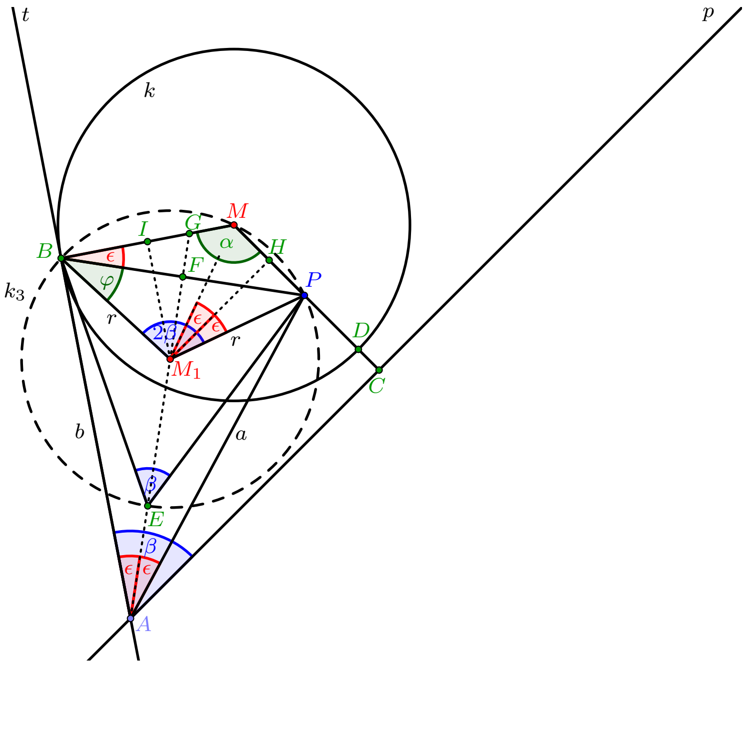
(4) in (3) $\quad a^2 + R^2 = e^2 + R^2 + d^2$,

$a^2 = e^2 + d^2$ ...(5).

Im Dreieck ΔACP ist $\quad b^2 = e^2 + d^2$ ...(6).

(5)=(6) $\quad a^2 = b^2$, $\quad \underline{\underline{a = b}}$ w.z.b.w.

c)



Einige Winkelbetrachtungen sind notwendig.
Im Viereck $\square ACMB$ ist $\quad \beta + 90° + \alpha + 90° = 360°, \quad \beta = 180° - \alpha \quad ...(7).$
Die Dreiecke ΔAFB und ΔBFG sind einander ähnlich, so dass $\sphericalangle FBG = \epsilon$.
Da $a = b$, ist das Dreieck ΔAPB gleichschenklig mit der Basis $\overline{PB}$. Auf dessen Höhe $\overline{AF}$ liegt ein Punkt E, so dass das gleichschenklige Dreieck ΔEPB den Umkreis k_3 mit dem Radius r hat. Der Winkel an der Spitze hat die Größe von β, da im Sehnenviereck $\square EPMB$ gilt: $\alpha + \beta = 180°$. Der Winkel $\sphericalangle BM_1P$ ist ein Zentriwinkel von k_3 über der Sehne $\overline{PB}$, also nach dem Zentriwinkel-Peripheriewinkelsatz doppelt so groß wie β. Gleiches gilt für den Winkel $\sphericalangle MM_1P$ über der Sehne $\overline{PM} = s$, der die Größe von 2ϵ hat. Es gibt drei Gleichungen, um den Radius r zu bestimmen.

Im Dreieck ΔBM_1P ist $\quad 2 \cdot \varphi + 2 \cdot \beta = 180°, \quad \varphi + \beta = 90°,$
mit (7) $\quad \varphi + 180° - \alpha = 90°, \quad \varphi = \alpha - 90° \quad ...(8).$
Im Dreieck ΔBM_1I ist $\quad cos(\epsilon + \varphi) = \frac{R}{2 \cdot r}, \quad r = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{cos(\epsilon+\varphi)},$
mit (8) $\quad r = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{cos(\epsilon+\alpha-90°)}, \quad r(\epsilon) = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{sin(\alpha+\epsilon)} \quad ...(9).$
Im Dreieck ΔMM_1H ist $\quad sin\ \epsilon = \frac{\overline{PM}}{2 \cdot r}, \quad r = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{sin\ \epsilon} \quad ...(10).$
Im Dreieck ΔAPB ist $\quad \overline{PB}^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\ (2\epsilon),$
$a = b \quad \overline{PB}^2 = 2 \cdot a^2 - 2 \cdot a^2 \cdot cos\ (2\epsilon), \quad \overline{PB}^2 = 2 \cdot a^2 \cdot (1 - cos\ (2\epsilon)) \quad ...(11),$
im Dreieck ΔBM_1P ist $\quad \overline{PB}^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r^2 \cdot cos\ (2\beta), \quad \overline{PB}^2 = 2 \cdot r^2 \cdot (1 - cos\ (2\beta)) \quad ...(12),$
(11)=(12) $\quad r^2 = a^2 \cdot \frac{1-cos\ (2\epsilon)}{1-cos\ (2\beta)}, \quad r = a \cdot \sqrt{\frac{1-cos\ (2\epsilon)}{1-cos\ (2\beta)}},$
$2 \cdot sin^2 x = 1 - cos(2x)$ in (10) $\quad r = a \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot sin^2 \epsilon}{2 \cdot sin^2 \beta}}, \quad r = a \cdot \frac{sin\ \epsilon}{sin\ \beta},$
mit (7) $\quad r = a \cdot \frac{sin\ \epsilon}{sin(180° - \alpha)}, \quad r = a \cdot \frac{sin\ \epsilon}{sin\ \alpha} \quad ...(13).$

Der Radius des Hilskreises k_3 kann nun eliminiert werden, um die Entfernung von P zum Koordinatenursprung zu bestimmen.
(9)=(10) $\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{sin(\alpha+\epsilon)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{sin\ \epsilon}, \quad s(\epsilon) = R \cdot \frac{sin\ \epsilon}{sin(\alpha+\epsilon)} \quad ...(14).$

Nun können die Koordinaten von P ermittelt werden.
Der Punkt D liegt auf einer Normalen zu p. Er ist der Schnittpunkt des Kreises k mit der Normalen, deren Steigung m_n sei. Die Gleichung von k lautet $x^2 + y^2 = R^2$.

Gleichung der Normalen n: $\quad y - y_D = m_n \cdot (x - x_D),$
$M(0 \mid 0) \in n,\ m_n = -\frac{1}{m_p} \quad y_D = m_n \cdot x_D, \quad y_D = -\frac{x_D}{m_p} \quad ...(15),$
$D \in k \quad x_D^2 + y_D^2 = R^2 \quad ...(16),$
(15) in (16), $\quad x_D^2 + \frac{x_D^2}{m_p^2} = R^2, \quad x_D = \frac{R \cdot m_p}{\sqrt{m_p + 1}} \quad ...(17),$
(17) in (16) $\quad \frac{R^2 \cdot m_p^2}{m_p + 1} + y_D^2 = R^2, \quad y_D^2 = R^2 - \frac{R^2 \cdot m_p^2}{m_p + 1},$
positive Lösung entfällt $\quad y_D = -R \cdot \sqrt{1 - \frac{m_p^2}{m_p + 1}}, \quad ...(18).$

Dann ist $\quad \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OD}|} \cdot s, \quad \overrightarrow{OP} = \frac{\begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix}}{R} \cdot s,$

mit (17), (18), (14) $\quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{R \cdot m_p}{\sqrt{m_p + 1}} \\ -R \cdot \sqrt{1 - \frac{m_p^2}{m_p + 1}} \end{pmatrix} \cdot \frac{R \cdot \frac{sin\ \epsilon}{sin(\alpha+\epsilon)}}{R},$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} m_p \\ -\sqrt{m_p + 1 - m_p^2} \end{pmatrix} \cdot \frac{R}{\sqrt{m_p + 1}} \cdot \frac{sin\ \epsilon}{sin(\alpha+\epsilon)}.$$

Die Entfernung von P zum Koordinatenursprung kann noch in Abhängigkeit von der Strecke a und ϵ bestimmt werden.
So ist mit (10)=(13) $\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{sin\ \epsilon} = a \cdot \frac{sin\ \epsilon}{sin\ \alpha}, \quad s(\epsilon, a) = 2 \cdot a \cdot \frac{sin^2 \epsilon}{sin\ \alpha} \quad ...(19).$
Setzt man (14)=(19), kann ϵ eliminiert und wieder in (14) oder (19) eingesetzt werden, so s nur noch vom sich veränderden a abhängt.