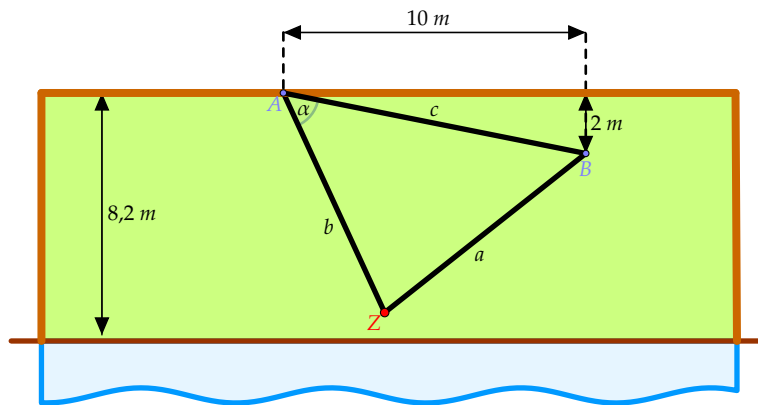


Die Ziege am Wassergraben

Eine Ziege befindet sich auf einer eingezäunten Weidefläche, die von einem Wassergraben durchzogen wird. In den Punkten A und B befindet sich je ein Holzpflöck an dem ein nicht dehnbares Seil der Länge $\ell = 25 \text{ m}$ befestigt ist. Die Ziege ist mit einem Ring an das Seil befestigt. Zwischen der Ziege und dem Pflöck B liegt das Seil doppelt.
(Die Ziege und der Pfahl sind als punktförmig anzusehen.)

- Auf welcher Kurve bewegt sich die Ziege bei straff gespanntem Seil?
- Wie groß ist die Fläche F, welche die Ziege maximal abgrasen kann?
- Die Ziege soll bei straff gespanntem Seil den $8,20 \text{ m}$ entfernt liegenden Wassergraben erreichen. Ist die Seillänge ℓ dafür ausreichend?

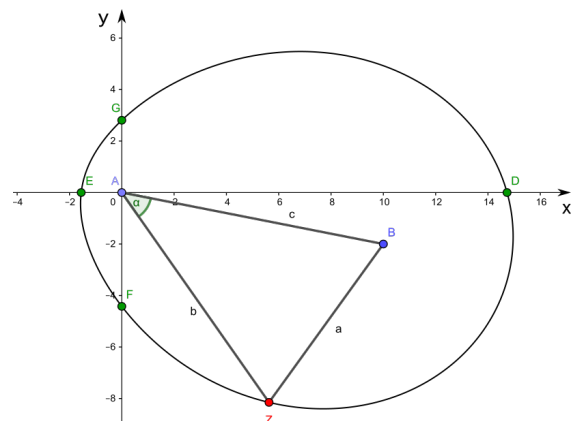


Aufgabe „Die grasende Ziege am Seil Teil III“ von Ingmar Rubin, Berlin, vom 6. April 2020

Lösung

- Der Punkt A wird in den Koordinatenursprung gelegt, der Punkt B hat die Koordinaten $B(10 \mid -2)$, die Ziege Z soll die Koordinaten $Z(x \mid y)$ haben. Die Dreiecksseite a hat die Länge $a = \sqrt{(x-10)^2 + (y+2)^2}$, die Seite $b = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Die Länge der Strecke c ist $c = \sqrt{10^2 + (-2)^2}$, $c = 2 \cdot \sqrt{26}$... (1).
Es ist $\ell = 2 \cdot a + b$, $a = \frac{25}{2} - \frac{b}{2}$... (2).
Mit (2) und a, b entsteht $\sqrt{x^2 - 20 \cdot x + y^2 + 4 \cdot y + 104} = \frac{1}{2} \cdot (25 + \sqrt{x^2 + y^2})$,
quadriert, vereinfacht $3y^2 + 16y + 3x^2 - 80x - 209 + 50 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 0$... (3).

Es handelt sich bei der Funktion um ein Kartesisches Oval. Die Punkte D, E, F und G sind die Nullstellen von (3). Die Ziege kann sich unterhalb der x-Achse zwischen den Punkten $D\left(5 + 2 \cdot \sqrt{\frac{71}{3}} \mid 0\right)$ und $E\left(\frac{65}{3} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1213} \mid 0\right)$ maximal bis zum Kartesischen Oval bewegen.



- b) Per Hand ist die Kurve (3) nicht integrierbar, mit dem Programm Wolfram Mathematica gibt es zwei Möglichkeiten, die Fläche zu berechnen.

1. Möglichkeit

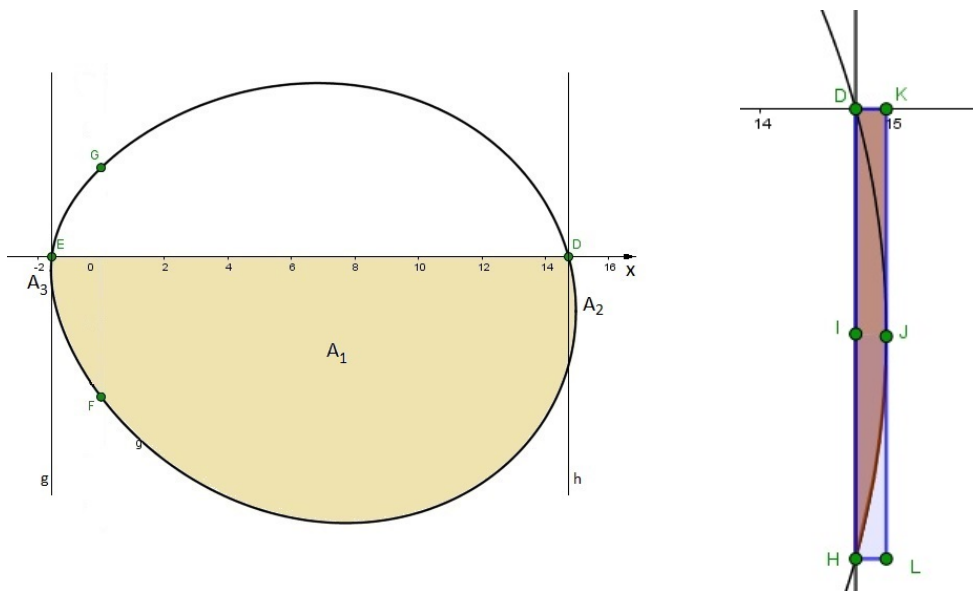
Mathematica kann die Gleichung (3) nach y auflösen. Dazu muss das Oval in drei Bereiche eingeteilt werden, ein sehr kleiner, kaum sichtbarer Abschnitt A_3 vom minimalen Abszissenwert des Ovals bis zur Nullstelle x_E , den Hauptbereich A_1 von x_E bis x_D und den kleinen Bereich A_2 von x_D bis zum maximalen Abszissenwert. Mathematica gibt vier Lösungen aus mit dem

Befehl $gl2 = \text{Solve}[50\sqrt{x^2 + y^2} + 3x^2 - 80x + 3y^2 + 16y - 209 = 0, y]$.

Mit der zweiten Lösung kann die Fläche A_1 numerisch bestimmt werden, die Eingaben sind $gl2[[2]]$ und $\text{Abs}[N\text{Integrate}[y/., \{x, 65/3 - 2/3\text{Sqrt}[1213], 5 + 2\text{Sqrt}[71/3]\}]]$.

Als Ausgabe liefert Mathematica den Wert für A_1 110.142.

Schwieriger sind die Bereiche A_2 und A_3 zu berechnen. Exemplarisch wird A_2 betrachtet.



Die Linie $h = x_D$ schneidet das Oval außer in D noch im Punkt H . Der Mittelpunkt der Strecke \overline{DH} ist der Punkt I . Die Linie $g = x_E$ schneidet das Oval außer in E noch in einem weiteren Punkt, z.B. N . Auch hier kann der Mittelpunkt M von der Strecke \overline{EN} bestimmt werden. Eine Gerade durch die Punkte M und I schneidet das Oval im Punkt $J(14,961879 | y_J)$. Der Punkt K hat die Koordinaten $K(x_J | 0)$. Der Punkt J hat den maximalen Abszissenwert. Er liegt etwas tiefer als der Punkt I .

Bestimmt man das Integral von (3) über x_D und x_K so liefert Mathematica mit dem Befehl

$$s21 = N\text{Integrate}\left[-y/., \left\{x, 2\sqrt{\frac{71}{3}} + 5, 14.961879\right\}\right] \quad 0.663762$$

den Flächeninhalt der braunen Fläche. Die hellblau Fläche A_{HLJ} entsteht aus der Differenz der Fläche des Rechtecks $A_{\square DHLK}$ und $s21$, wobei $H(x_D, -3,422501)$. Das gesuchte Flächensegment des Bogens ergibt sich aus

$$A_2 = s21 - (A_{\square DHLK} - s21), \quad A_2 = 2 \cdot s21 - A_{\square DHLK}. \quad \text{Mit der Eingabe von}$$

$$2s21 - 3.422501 \left(14.961897 - \left(2\sqrt{\frac{71}{3}} + 5 \right) \right)$$

liefert Mathematica den Wert für A_2 0.532822.

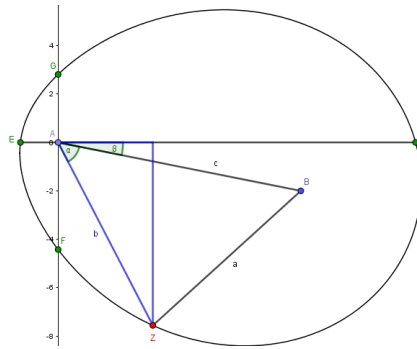
Analog kann die Fläche A_3 bestimmt werden, Mathematica berechnet A_3 mit 0.014494.

Die Summation der drei Teilflächen ergibt die Gesamtfläche unter der x-Achse

$$A = A_1 + A_2 + A_3, \quad \underline{\underline{A = 110.689743.}}$$

Der Flächeninhalt, den die Ziege abgrasen kann, beträgt rund $110,69 \text{ m}^2$.

2. Möglichkeit



Es wird eine Abhängigkeit der Seite b vom Winkel α hergestellt. Mit dem Kosinussatz ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha,$$

mit (1),(2) $\left(\frac{25}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 = b^2 + 104 - 2 \cdot b \cdot 2 \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \alpha,$... (4)

$$\frac{625}{4} - \frac{25}{2} \cdot b + \frac{b^2}{4} = b^2 + 104 - 4 \cdot \sqrt{26} \cdot b \cdot \cos \alpha,$$

$$0 = b^2 - \frac{1}{3} \cdot (16 \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \alpha - 50) \cdot b - \frac{209}{3},$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{3} \cdot (8 \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \alpha - 25) \pm \sqrt{\frac{1}{9} \cdot (8 \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \alpha - 25)^2 + \frac{209}{3}},$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{3} \cdot (8 \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \alpha - 25) \pm \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1664 \cdot \cos^2 \alpha - 400 \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \alpha + 625 + 627},$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{3} \cdot \left(8 \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \alpha - 25 \pm \sqrt{1664 \cdot \cos^2 \alpha - 400 \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \alpha + 1252}\right),$$

neg. Lsg. entfällt $b(\alpha) = \frac{1}{3} \cdot \left(8 \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \alpha - 25 + 2 \cdot \sqrt{416 \cdot \cos^2 \alpha - 100 \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \alpha + 313}\right)$... (5).

Mit Hilfe der Leibnizschen Sektorenformel $F = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\beta}^{\pi-\beta} (b(\alpha))^2 \cdot d\alpha$

kann die Fläche unterhalb der x-Achse berechnet werden, indem der Punkt Z den Winkelbereich von $\arctan(-0,2) \leq \alpha \leq \pi - \arctan(0,2),$ $-11,30993^\circ \leq \alpha \leq 168,69007^\circ$

durchläuft. Der Befehl in Mathematica lautet mit $b = b(\alpha)$ aus (5)

$$1/2 NIntegrate[(b/.)^2, \{\alpha, \text{ArcTan}[-0.2], \pi - \text{ArcTan}[0.2]\}]$$

Die Ausgabe ist 110.689.

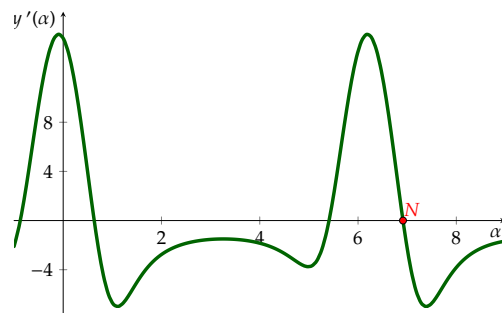
- c) Das Minimum, der kleinste y-Wert des Kartesischen Ovals muss bestimmt werden.

Es ist $y(\alpha, \beta) = b(\alpha) \cdot \sin(\alpha + \beta),$ $y(\alpha) = b(\alpha) \cdot \sin(\alpha + \arctan(0,2)),$

$$y(\alpha) = \frac{1}{3} \cdot \left(8 \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \alpha - 25 + 2 \cdot \sqrt{313 - 100 \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \alpha + 416 \cdot \cos^2 \alpha}\right) \cdot \sin(\alpha + \arctan(0,2)) \quad \dots (6).$$

Die Nullstelle N der Ableitungsfunktion $y'(\alpha)$ gibt den Winkel α für das Minimum des Kartesischen Ovals an. Es liegt bei $N(6,91459 \mid 0)$. Wird nun α in (6) eingesetzt, erhält man die tiefste Stelle des Ovals $y_{\min}(6,91459) = 8,40128$.

Die 25 m lange Leine reicht aus, damit die Ziege den Wassergraben erreicht.



Ich danke Ingmar Rubin, Berlin, ohne dessen Hilfe ich die Aufgaben nicht hätte lösen können.