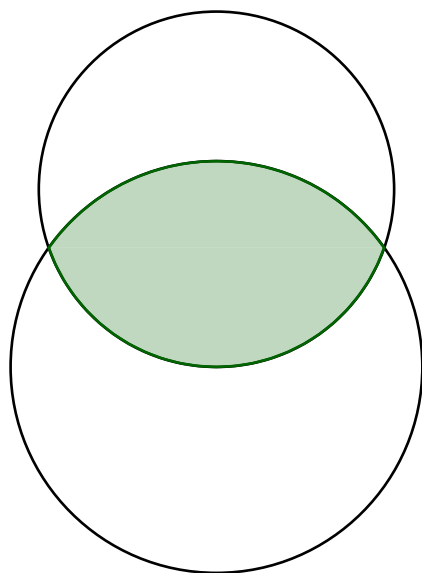


Das Ziegenproblem der Geometrie

Eine Ziege steht auf einer kreisförmigen Wiese. Die Ziege wird mit einer Leine an einem senkrechten Pfahl festgebunden, der exakt auf dem Rand der Wiese steht.

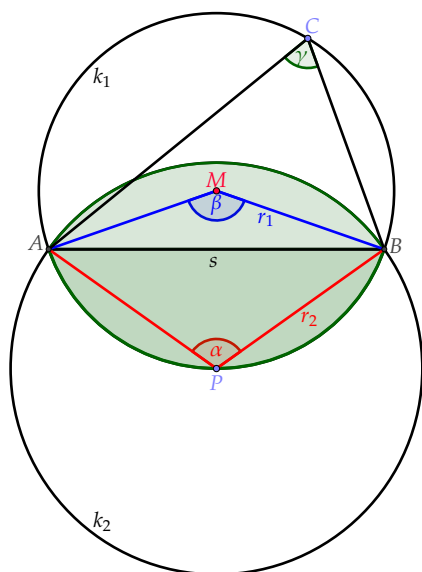
Welche Länge muss die Leine haben, damit die Ziege gerade die Hälfte der Fläche der kreisförmigen Wiese abgrasen kann?

(Die Ziege und der Pfahl sind als punktförmig anzusehen.)



Aufgabe aus dem 18. Jahrhundert. Die erste Veröffentlichung erfolgte laut Wikipedia 1748 in dem in England einmal jährlich erscheinenden „The Ladies Diary: or, the Woman’s Almanack“.

Lösung



1. Beziehung zwischen α und β

Der Winkel γ ist ein Peripheriewinkel über der Sehne s , β der dazugehörige Zentriwinkel.

Es ist $\beta = 2 \cdot \gamma$, ... (1).

Die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck $\square PBCA$ sind zusammen 180° groß,

d.h. $\alpha + \gamma = 180^\circ$... (2).

Aus (1) und (2) entsteht $\alpha + \frac{\beta}{2} = \pi$, $\beta = 2 \cdot \pi - 2 \cdot \alpha$... (3).

2. Verhältnis von $\frac{r_2}{r_1}$

Im Dreieck $\triangle PBM$ gilt nach dem Kosinussatz:

$$r_2^2 = r_1^2 + r_1^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_1 \cdot \cos \frac{\beta}{2}, \quad r_2^2 = 2 \cdot r_1^2 \cdot \left(1 - \cos \frac{\beta}{2}\right),$$

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 2 \cdot \left(1 - \cos \frac{\beta}{2}\right),$$

mit (3) $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 2 \cdot (1 - \cos (\pi - \alpha)),$

mit $\cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 2 \cdot (1 + \cos \alpha)$... (4).

3. Formel für ein Kreissegment

Der Kreissektor des Kreises k_1 setzt sich aus einem Kreissegment A_{S_1} und dem Flächeninhalt des Dreiecks A_D , das aus den Punkten A, B und M gebildet wird, zusammen.

So ist $A_{\text{Sektor}} = A_{S_1} + A_D$... (5).

Der Flächeninhalt von A_D ist $A_D = \frac{1}{2} \cdot r_1^2 \cdot \sin \beta$... (6).

Der Flächeninhalt des A_K ist $A_K = \pi \cdot r_1^2.$

Weiterhin gilt $\frac{A_{\text{Sektor}}}{A_K} = \frac{\beta}{2 \cdot \pi}, \quad A_{\text{Sektor}} = \pi \cdot r_1^2 \cdot \frac{\beta}{2 \cdot \pi},$

$$A_{\text{Sektor}} = r_1^2 \cdot \frac{\beta}{2}.$$

Mit (5) und (6) ist $A_{S_1} + \frac{1}{2} \cdot r_1^2 \cdot \sin \beta = r_1^2 \cdot \frac{\beta}{2}, \quad A_{S_1} = \frac{1}{2} \cdot r_1^2 \cdot (\beta - \sin \beta).$

4. Beziehungen zwischen den Winkeln durch Berechnung der Fläche beider Kreissektoren

Der Kreissektor unter der Sehne s sei A_{S_1} , der über s A_{S_2} , die Halbkreisfläche A .

Dann ist $A = A_{S_1} + A_{S_2},$

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2 = \frac{1}{2} \cdot r_1^2 \cdot (\beta - \sin \beta) + \frac{1}{2} \cdot r_1^2 \cdot (\alpha - \sin \alpha),$$

vereinfacht $\pi = \beta - \sin \beta + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot (\alpha - \sin \alpha),$

mit (4) $\pi = \beta - \sin \beta + 2 \cdot (1 + \cos \alpha) \cdot (\alpha - \sin \alpha),$

$$\pi = \beta - \sin \beta + 2 \cdot \alpha - 2 \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

mit (3) $\pi = 2 \cdot \pi - 2 \cdot \alpha - \sin \beta + 2 \cdot \alpha - 2 \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$

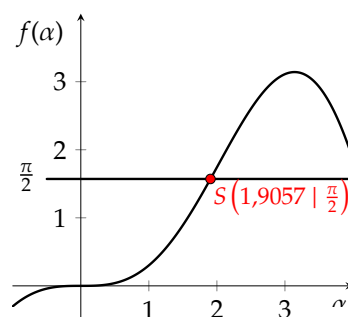
$$-\pi = -\sin \beta - 2 \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

nochmal mit (3) $-\pi = -\sin (2 \cdot \pi - 2 \cdot \alpha) - 2 \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$

$$-\sin (2 \cdot \pi - 2 \cdot \alpha) = \sin (2 \cdot \alpha) \quad -\pi = \sin (2 \cdot \alpha) - 2 \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$-2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\sin (2 \cdot \alpha) \quad -\pi = \sin (2 \cdot \alpha) - 2 \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \alpha \cdot \cos \alpha - \sin (2 \cdot \alpha),$$

$$\frac{\pi}{2} = \sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha, \quad f(\alpha) = \sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha.$$



Der Winkel α ist bestimmt $\alpha = 1,9057,$

$$\alpha = 109,1883^\circ.$$

5. Berechnung der Länge der Leine

Mit (4) ist $r_2^2 = 2 \cdot r_1^2 \cdot (1 + \cos \alpha),$

$$r_2^2 = 2 \cdot r_1^2 \cdot 0,67133,$$

$$r_2^2 = 2 \cdot r_1^2 \cdot (1 + \cos \alpha)$$

$$\underline{\underline{r_2 = 1,15873 \cdot r_1}}$$

Die Leine der Ziege muss eine Länge von $r_2 = 1,15873 \cdot r_1$ haben, damit sie die Hälfte der Kreisfläche abgrasen kann.