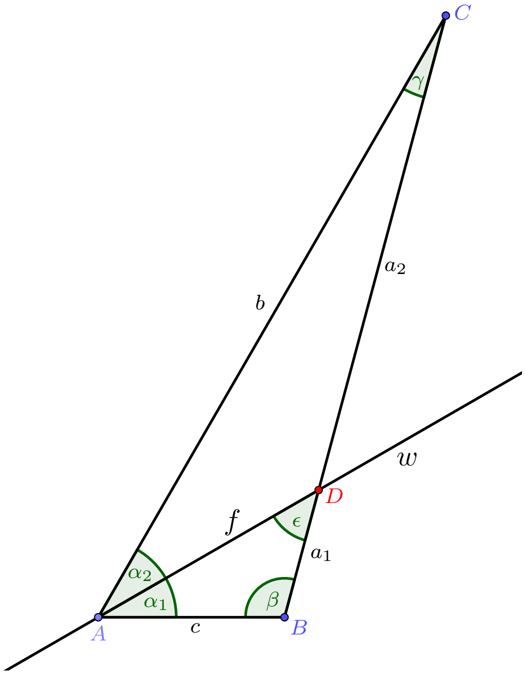
# Zwei Dreiecke im allgemeinen Dreieck

In einem Dreieck $\Delta ABC$ schneidet die Winkelhalbierende des Winkels $\alpha = \sphericalangle CAB$ die Seite $\overline{BC}$ im Punkt $D$. Es gelte ferner : $\overline{BD} \cdot \overline{DC} = \overline{AD}^2$ und $\sphericalangle BDA = 45°$.

a) Wie groß sind die Innenwinkel $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ des Dreiecks $\Delta ABC$?

b) In welchem Verhältnis wird Seite $\overline{BC}$ geteilt?




Aufgabe aus dem Mannschaftswettbewerb „Baltic Way“ vom 4. November 2001

**Lösung**

a) Im Dreieck $\Delta ABD$ gilt $\frac{sin(\alpha_1)}{sin(\beta)} = \frac{a_1}{f}$, $\quad a_1 = \frac{sin(\alpha_1)}{sin(\beta)} \cdot f$ ...(1).

Im Dreieck $\Delta ADC$ gilt $\frac{sin(\alpha_2)}{sin(\gamma)} = \frac{a_2}{f}$, $\quad a_2 = \frac{sin(\alpha_2)}{sin(\gamma)} \cdot f$ ...(2).

Mit $a_1 \cdot a_2 = f^2$, (1), (2) $\frac{sin(\alpha_1)}{sin(\beta)} \cdot f \cdot \frac{sin(\alpha_2)}{sin(\gamma)} \cdot f = f^2$, $\quad \frac{sin(\alpha_1)}{sin(\beta)} \cdot \frac{sin(\alpha_2)}{sin(\gamma)} = 1$ ...(3).

Da $\epsilon = 45°$, ist im Dreieck $\Delta ABD$ der Winkel $\beta$ $\quad \beta = 135° - \alpha_1$ ...(4),

und im Dreieck $\Delta ADC$ der Winkel $\gamma$ $\quad \gamma = 45° - \alpha_2$ ...(5).

Mit $\alpha_1 = \alpha_2$, (4) und (5) wird aus (3) $\quad \frac{sin^2(\alpha_1)}{sin(135°-\alpha_1) \cdot sin(45°-\alpha_1)} = 1.$

Das Additionstheorem $sin\,(x-y) = sin\,(x) \cdot cos\,(y) - sin\,(y) \cdot cos\,(x)$ liefert

$$\frac{sin^2(\alpha_1)}{(sin(135°) \cdot cos(\alpha_1) - sin(\alpha_1) \cdot cos(135°)) \cdot (sin(45°) \cdot cos(\alpha_1) - sin(\alpha_1) \cdot cos(45°))} = 1,$$

$$\frac{sin^2(\alpha_1)}{\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot cos(\alpha_1) - sin(\alpha_1) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot cos(\alpha_1) - sin(\alpha_1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)} = 1,$$

$$\frac{sin^2(\alpha_1)}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (cos(\alpha_1) + sin(\alpha_1)) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (cos(\alpha_1) - sin(\alpha_1))} = 1,$$

$\frac{2 \cdot sin^2(\alpha_1)}{cos^2(\alpha_1) - sin^2(\alpha_1)} = 1$, $\quad 2 \cdot sin^2\,(\alpha_1) = cos^2\,(\alpha_1) - sin^2\,(\alpha_1)$, $\quad 3 \cdot sin^2\,(\alpha_1) = cos^2\,(\alpha_1)$

$tan^2\,(\alpha_1) = \frac{1}{3}$, $\quad tan\,(\alpha_1) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$, $\quad \alpha = 30°$.

Die Innenwinkel des Dreiecks $\Delta ABC$ haben eine Größe von $\alpha = 60°$, $\beta = 105°$ und $\gamma = 15°$.

b) Nach dem Satz des Apollonius:

„Die Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Dreicksseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.“

entsteht

$$\frac{c}{b} = \frac{a_1}{a_2}, \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{sin(\gamma)}{sin(\beta)}, \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{sin(15^\circ)}{sin(105^\circ)},$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}, \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{4}, \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{8-2\cdot\sqrt{12}}{4},$$

$$\frac{a_1}{a_2} = 2 - \sqrt{3}, \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Die Seite $\overline{BC}$ wird im Verhältnis von $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ geteilt.