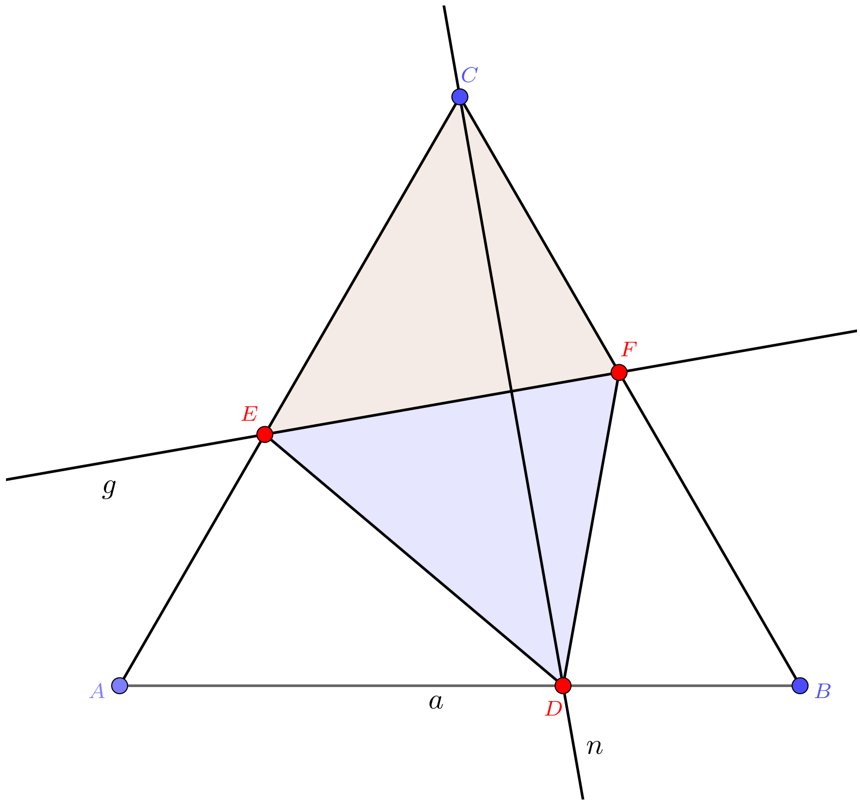
Zwei kongruente Dreiecke im gleichseitigen Dreieck

Eine Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{\sqrt{3}}{10} \cdot x + 2$ schneidet ein gleichseitiges Dreieck ΔABC in den Punkten E und F. Die Normale n zu g durch den Punkt C schneidet die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt D so, dass die Dreiecke ΔEDF und ΔEFC kongruent zueinander sind.
Welche Seitenlänge a besitzt das Dreieck ΔABC?



Lösung

Legt man den Punkt A in den Koordinatenursprung,so hat der Punkt C die Koordinaten $C\left(\frac{a}{2} \mid \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}\right)$ ...(1).
Die Gleichung der Normalen n kann ermittelt werden. Sie verläuft durch den Punkt C, ihre Steigung ist $m_n = -\frac{10}{3} \cdot \sqrt{3}$ ...(2).
Bestimmung von n mit (1) und (2): $y = m_n \cdot x + b, \quad \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = -\frac{10}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} + b, \quad b = \frac{13}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot a.$
Die Normale hat die Gleichung $y = -\frac{10}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot x + \frac{13}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot a.$
Ihre Nullstelle ist mit $y = 0$ $\quad x_N = \frac{\frac{13}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot a}{\frac{10}{3} \cdot \sqrt{3}}, \quad x_N = \frac{13}{20} \cdot a.$
Der Punkt D hat die Koordinaten $D\left(\frac{13}{20} \cdot a \mid 0\right)$.
Die beiden Dreiecke ΔEDF und ΔEFC sind dann zueinander kongruent, wenn der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ auf der Geraden g liegt.
Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ hat die Koordinaten $M\left(\frac{\frac{a}{2} + \frac{13}{20} \cdot a}{2} \mid \frac{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} + 0}{2}\right), \; M\left(\frac{23}{40} \cdot a \mid \frac{a}{4} \cdot \sqrt{3}\right).$
M in g liefert $\quad \frac{a}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{10} \cdot \frac{23}{40} \cdot a + 2, \quad a \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{23}{400}\right) = 2 \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{400}{77}, \quad a = \frac{800}{231} \cdot \sqrt{3}.$
Die Seitenlänge des Dreiecks ΔABC beträgt rund $a = 6 \; LE$.