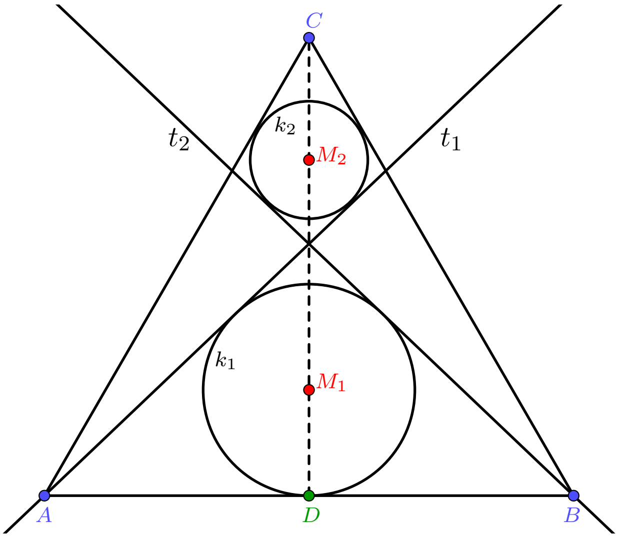
Zwei Kreise im gleichseitigen Dreieck

Gegeben sei das gleichseitige Dreieck ΔABC mit der Seitenlänge a. Auf der Höhenlinie $h_c = \overline{CD}$ befinden sich die Mittelpunkte M_1 und M_2 der Kreise k_1 und k_2. Der Kreis k_1 tangiert die Seite $\overline{AB}$ im Punkt D. Der Kreis k_2 tangiert die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ des Dreiecks. Die gemeinsamen Tangenten t_1 und t_2 der Kreise laufen durch die Punkte A bzw. B.

a) Wie groß ist der Radius von k_1 und k_2 in Abhängigkeit von a für den Fall, dass beide Kreise gleich groß sind?

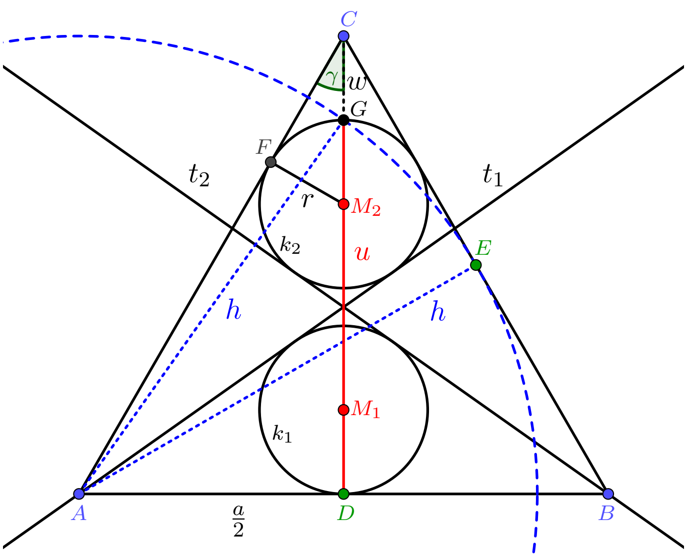
b) Wie groß ist der Radius r_2 von k_2 in Abhängigkeit von a und dem Radius r_1 von k_1?



Aufgabe aus der Japanischen Tempelgeometrie

Lösung

a)



Zunächst muss die Strecke $w = \overline{CG}$ bestimmt werden. Im rechtwinkligen Dreieck ΔM_2CF ist

$sin\,(\gamma) = \frac{r}{r+w}$, $\qquad sin\,(30^\circ) = \frac{r}{r+w}$, $\qquad \frac{1}{2} = \frac{r}{r+w}$,

$w = r$ ...(1).

Nun wird der Fußpunkt E der Höhe $\overline{AE} = h$ auf die senkrechte Höhe $\overline{CD}$ gedreht. Es entsteht der Punkt G, wobei $\overline{DG} = u$.

Im Dreieck ΔADG gilt $\qquad h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + u^2$, $\qquad u^2 = h^2 - \frac{a^2}{4}$,

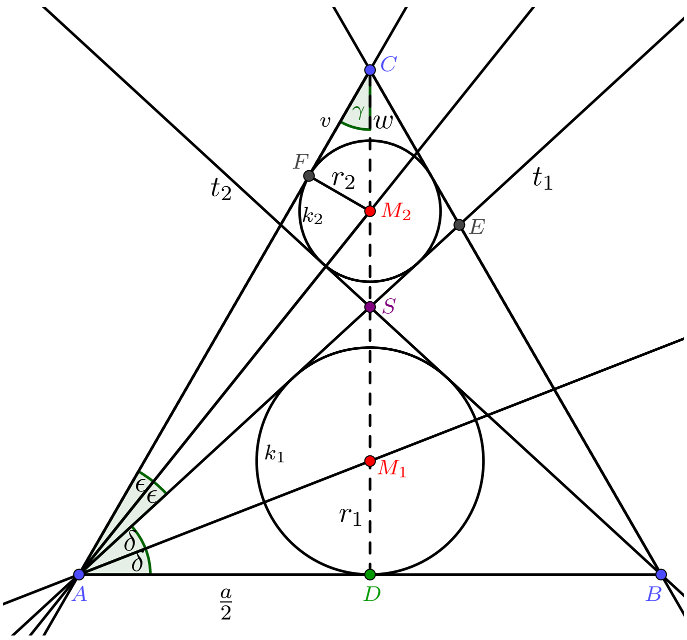
mit $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$, $\qquad u^2 = \frac{3}{4} \cdot a^2 - \frac{1}{4} \cdot a^2$, $\qquad u = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a$ ...(2).

Für $\overline{CD} = h$ gilt $\qquad h = u + w$,

mit (1) und (2) $\qquad \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} + r$, $\qquad \underline{\underline{r = \frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}}$.

Damit beide Kreise gleich groß sind, muss ihr Radius $r = \frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ betragen.

b)



Im Dreieck ΔM_2CF kann die Länge der Seite $v = \overline{FC}$ bestimmt werden.

So ist mit (1) $\qquad v = \sqrt{(2 \cdot r_2)^2 - r_2^2}$, $\qquad v = \sqrt{3} \cdot r_2$ ...(3).

Im Dreieck ΔABS verläuft die Winkelhalbierende durch den Punkt M_1.

Im Dreieck ΔAEC verläuft die Winkelhalbierende durch den Punkt M_2.

Für den Winkel α gilt $\qquad \alpha = 2 \cdot \delta + 2 \cdot \epsilon$, $\qquad 30^\circ = \delta + \epsilon$ ...(4).

Im Dreieck ΔADM_1 ist $\qquad tan\,(\delta) = \frac{2 \cdot r_1}{a}$ ...(5),

im Dreieck ΔAM_2F $\qquad tan\,(\epsilon) = \frac{r_2}{a-v}$, mit (3) $\qquad tan\,(\epsilon) = \frac{r_2}{a - \sqrt{3} \cdot r_2}$ ...(6).

Das Additionstheorem $tan\,(\delta + \epsilon) = \frac{tan(\delta) + tan(\epsilon)}{1 - tan(\delta) \cdot tan(\epsilon)}$ liefert

mit (4), (5) und (6) $\qquad tan\,(30^\circ) = \frac{\frac{2 \cdot r_1}{a} + \frac{r_2}{a - \sqrt{3} \cdot r_2}}{1 - \frac{2 \cdot r_1}{a} \cdot \frac{r_2}{a - \sqrt{3} \cdot r_2}}$, $\qquad tan\,(30^\circ) = \frac{2 \cdot r_1 \cdot \left(a - \sqrt{3} \cdot r_2\right) + a \cdot r_2}{a \cdot \left(a - \sqrt{3} \cdot r_2\right) - 2 \cdot r_1 \cdot r_2}$,

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{2 \cdot r_1 \cdot a - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r_1 \cdot r_2 + a \cdot r_2}{a^2 - \sqrt{3} \cdot a \cdot r_2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2},$$

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 - a \cdot r_2 - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot r_1 \cdot r_2 = 2 \cdot r_1 \cdot a - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r_1 \cdot r_2 + a \cdot r_2,$$

$$\frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot r_1 \cdot r_2 - 2 \cdot a \cdot r_2 = 2 \cdot r_1 \cdot a - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2,$$

$$r_2 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot r_1 - 2 \cdot a\right) = a \cdot \left(2 \cdot r_1 - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a\right),$$

$$r_2 = \frac{a \cdot \left(2 \cdot r_1 - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a\right)}{\frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot r_1 - 2 \cdot a}, \qquad \underline{\underline{r_2 = a \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r_1 - a}{4 \cdot r_1 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot a}}}.$$