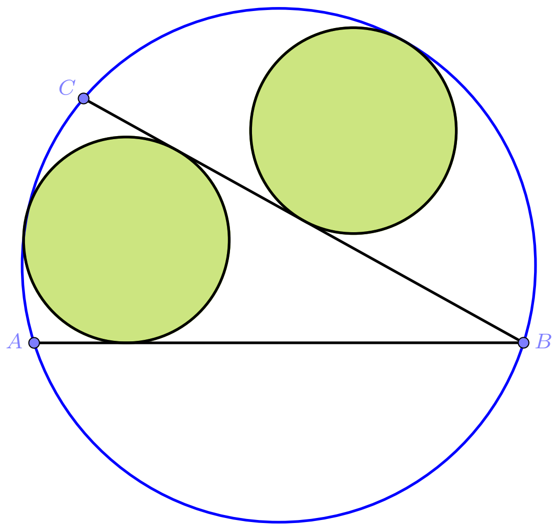
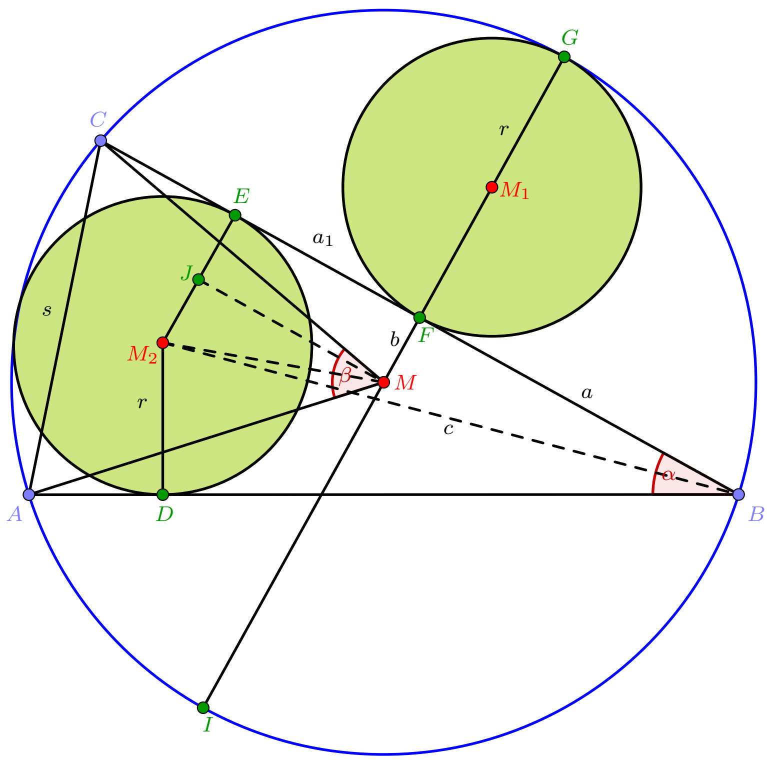
Zwei Kreise über einer Sehne

Das Kreissegment über der Sehne $\overline{AB}$ wird durch eine Sehne $\overline{BC}$ so gespalten, dass seine resultierenden Teile zwei kongruente Kreise enthalten. Ein Kreis berührt die gemeinsame Sehne in deren Mittelpunkt. Der Durchmesser des großen Kreises beträgt 697 Zoll, die Durchmesser der kongruenten Kreise sind jeweils 272 Zoll.
Welche Länge hat die Sehne $\overline{AB}$?



Kitta's Double-Locked Problem von J. Marshall Unger, Forum Geometricorum, Volume 14 (2014) 43-50, aus der der Sammlung Shinpeki Sanpo, Japanische Tempelgeometrie

Lösung



Mit dem Zentriwinkel-Peripheriewinkelsatz ist $\beta = 2 \cdot \alpha$ über der Sehne s ...(1).

Im Dreieck ΔABC gilt nach dem Kosinussatz $s^2 = (2 \cdot a)^2 + \overline{AB}^2 - 4 \cdot a \cdot \overline{AB} \cdot cos\ \alpha$ ...(2).

Die Sehne $s = \overline{AC}$ wird bestimmt mit (1) $s = 2 \cdot R \cdot sin\ \frac{\beta}{2}, \qquad s = 2 \cdot R \cdot sin\ \alpha,$

quadriert $s^2 = 4 \cdot R^2 \cdot sin^2\alpha,$ ...(3).

(2)=(3) $4 \cdot a^2 + \overline{AB}^2 - 4 \cdot a \cdot \overline{AB} \cdot cos\ \alpha = 4 \cdot R^2 \cdot sin^2\alpha,$

$sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$, $\overline{AB} = x$ $\quad a^2 + \frac{x^2}{4} - a \cdot x \cdot cos\ \alpha = R^2 \cdot \left(1 - cos^2\alpha\right)$ ...(4).

(4) wird nach $cos\ \alpha$ aufgelöst, pos. Lsg. entfällt $cos\ \alpha = \frac{a \cdot x - \sqrt{a^2 \cdot x^2 - 4 \cdot a^2 \cdot R^2 - x^2 \cdot R^2 + 4 \cdot R^4}}{2 \cdot R^2}$ ...(5).

Im Dreieck ΔM_2BE gilt mit $\overline{BM_2} = c$ $\quad sin\ \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{c}$ und $cos\ \frac{\alpha}{2} = \frac{a + a_1}{c}$ ...(6).

Mit (6) liefert $cos\ \alpha = cos^2\ \frac{\alpha}{2} - sin^2\ \frac{\alpha}{2}$ $\quad cos\ \alpha = \frac{(a+a_1)^2 - r^2}{c^2},$

mit $c^2 = (a + a_1)^2 + r^2$ $\quad cos\ \alpha = \frac{(a+a_1)^2 - r^2}{(a+a_1)^2 + r^2},$

$$cos\ \alpha = \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot a_1 + a_1^2 - r^2}{a^2 + 2 \cdot a \cdot a_1 + a_1^2 + r^2} \quad ...(7).$$

Der Sehnensatz erzeugt für die Sehnen $\overline{BC}$, $\overline{IG}$ $\quad a^2 = 2 \cdot r \cdot (2 \cdot R - 2 \cdot r),$

$$a^2 = 4 \cdot r \cdot (R - r) \quad ...(8).$$

Die Strecke b hat eine Länge von $b = R - 2 \cdot r$ ...(9).

Im Dreieck ΔMJM_2 ist $\quad \overline{M_2M}^2 = \overline{M_2J}^2 + \overline{JM}^2,$

mit $\overline{M_2M} = R - r$, $\overline{M_2J} = r - b$, $\overline{JM} = a_1$, (9) $\quad (R - r)^2 = (r - (R - 2 \cdot r))^2 + a_1^2,$

$$a_1^2 = 4 \cdot r \cdot (R - 2 \cdot r) \quad ...(10).$$

(8) in (5)

$$cos\ \alpha = \frac{\sqrt{4 \cdot r \cdot (R-r)} \cdot x - \sqrt{x^2 \cdot (4 \cdot r \cdot (R-r) - R^2) - 16 \cdot r \cdot (R-r) \cdot R^2 + 4 \cdot R^4}}{2 \cdot R^2},$$

$$cos\ \alpha = \frac{2 \cdot \sqrt{r \cdot (R-r)} \cdot x - \sqrt{-x^2 \cdot (R - 2 \cdot r)^2 + 4 \cdot R^2 \cdot (R - 2 \cdot r)^2}}{2 \cdot R^2},$$

$$cos\ \alpha = \frac{2 \cdot \sqrt{r \cdot (R-r)} \cdot x - (R - 2 \cdot r) \cdot \sqrt{(2 \cdot R + x) \cdot (2 \cdot R - x)}}{2 \cdot R^2} \quad ...(11).$$

(8), (10) in (7)

$$cos\ \alpha = \frac{4 \cdot r \cdot (R-r) + 2 \cdot \sqrt{4 \cdot r \cdot (R-r)} \cdot \sqrt{4 \cdot r \cdot (R - 2 \cdot r)} + 4 \cdot r \cdot (R - 2 \cdot r) - r^2}{4 \cdot r \cdot (R-r) + 2 \cdot \sqrt{4 \cdot r \cdot (R-r)} \cdot \sqrt{4 \cdot r \cdot (R - 2 \cdot r)} + 4 \cdot r \cdot (R - 2 \cdot r) + r^2},$$

$$cos\ \alpha = \frac{8 \cdot r \cdot R - 13 \cdot r^2 + 8 \cdot r \cdot \sqrt{R^2 - 3 \cdot r \cdot R + 2 \cdot r^2}}{8 \cdot r \cdot R - 11 \cdot r^2 + 8 \cdot r \cdot \sqrt{R^2 - 3 \cdot r \cdot R + 2 \cdot r^2}},$$

$$cos\ \alpha = \frac{13 \cdot r - 8 \cdot \left(R + \sqrt{R^2 - 3 \cdot r \cdot R + 2 \cdot r^2}\right)}{11 \cdot r - 8 \cdot \left(R + \sqrt{R^2 - 3 \cdot r \cdot R + 2 \cdot r^2}\right)} \quad ...(12).$$

(11)=(12)

$$\frac{2 \cdot \sqrt{r \cdot (R-r)} \cdot x - (R - 2 \cdot r) \cdot \sqrt{(2 \cdot R + x) \cdot (2 \cdot R - x)}}{2 \cdot R^2} = \frac{13 \cdot r - 8 \cdot \left(R + \sqrt{R^2 - 3 \cdot r \cdot R + 2 \cdot r^2}\right)}{11 \cdot r - 8 \cdot \left(R + \sqrt{R^2 - 3 \cdot r \cdot R + 2 \cdot r^2}\right)},$$

Das Umstellen der Gleichung nach $x = \overline{AB}$ kann mit Hilfe von Wolfram Mathematica erfolgen, so ist

$$\overline{AB} = \frac{4 \cdot \left(13r \cdot \sqrt{rR - r^2} + 22r \cdot \sqrt{-\frac{r \cdot (R-2r)^2 \cdot \left(3r - 2 \cdot \left(R + \sqrt{2r^2 - 3rR + R^2}\right)\right)}{\left(11r - 8 \cdot \left(R + \sqrt{2r^2 - 3rR + R^2}\right)\right)^2}} - 8 \cdot (R + \sqrt{2r^2 - 3rR + R^2}) \cdot \left(\sqrt{rR - r^2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{r \cdot (R-2r)^2 \cdot \left(-3 \cdot r + 2 \cdot \left(R + \sqrt{2r^2 - 3rR + R^2}\right)\right)}{\left(11r - 8 \cdot \left(R + \sqrt{2r^2 - 3rR + R^2}\right)\right)^2}}\right)\right)}{11 \cdot r - 8 \cdot \left(R + \sqrt{2 \cdot r^2 - 3 \cdot r \cdot R + R^2}\right)}.$$

Die gesuchte Sehne hat eine Länge von $\overline{AB} = 672$ Zoll.

Ein Dank an Ingmar Rubin, Berlin, der wertvolle Ideen zur Lösung der Aufgabe bereitstellte.