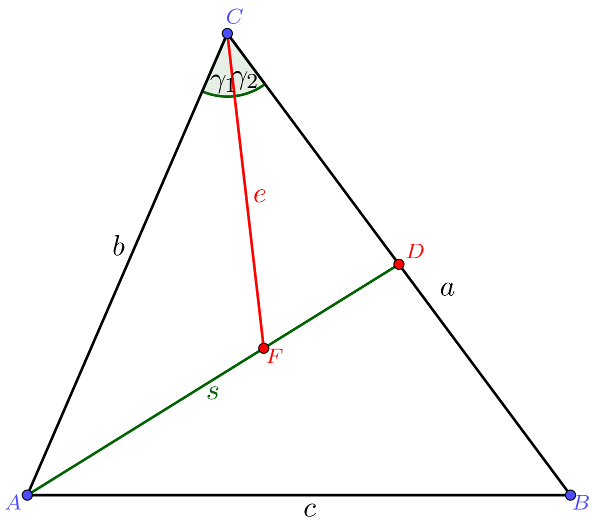
Zei Linien im Dreieck

Gegeben ist ein Dreieck ΔABC mit den Seiten $b = 7\ cm$, $a = 8\ cm$ und dem Winkel $\gamma = 60°$. Die Seitenhalbierende der Seite a schneide die Strecke $\overline{BC}$ im Punkt D. Die Winkelhalbierende von γ schneide die Seite $s = \overline{AD}$ in F.

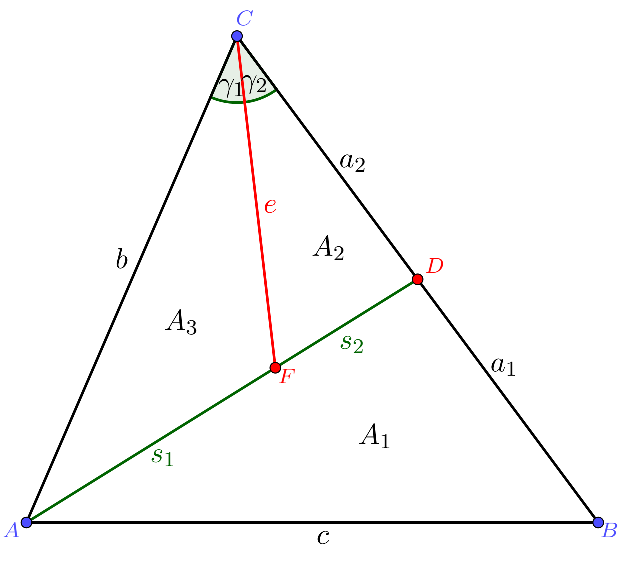
a) Wie lang ist die Strecke $e = \overline{CF}$?

b) Welche Koordinaten haben die Punkte B, C, D und F, wenn der Punkt A im Koordinatenursprung liegt?



Aufgabe aus Mathe-Treff vom 18.Juli.2001

Lösung



a) Die Seitenhalbierende s teilt das Dreieck ΔABC in zwei flächengleiche Dreiecke ΔABD und ΔADC. Dann ist $A = A_1 + A_2 + A_3$,
$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin\,(\gamma) = \frac{1}{4} \cdot a \cdot b \cdot sin\,(\gamma) + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot e \cdot sin\,(\gamma_2) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot e \cdot sin\,(\gamma_1)$,
mit $a_2 = \frac{a}{2}$ $\quad \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin\,(\gamma) = \frac{a}{2} \cdot e \cdot sin\,(\gamma_2) + b \cdot e \cdot sin\,(\gamma_1)$, $\quad \frac{1}{4} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{4} \cdot e + \frac{1}{2} \cdot b \cdot e$,
$e = \frac{\sqrt{3} \cdot a \cdot b}{a + 2 \cdot b}$, $\quad e = \frac{\sqrt{3} \cdot 56}{22}$, $\quad \underline{\underline{e = \frac{28}{11} \cdot \sqrt{3}.}}$ $\quad$ Die Strecke e ist rund $e = 4{,}41\ cm$ lang.

b) Die Seite c kann mit dem Kosinussatz berechnet werden, es ist

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\,(\gamma)$, $\quad c^2 = 64\ cm^2 + 49\ cm^2 - 2 \cdot 8\ cm \cdot 7\ cm \cdot \frac{1}{2}$, $\quad c = \sqrt{57}\ cm$.

Der Punkt B hat die Koordinaten $B\left(\sqrt{57} \mid 0\right)$.

Aus den Flächeninhaltsformeln des Dreiecks ΔABC entsteht die Beziehung

$\frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin\,(\gamma)$, $\quad h = \frac{a \cdot b}{c} \cdot sin\,(\gamma)$, $\quad h = \frac{8\ cm \cdot 7\ cm}{\sqrt{57}\ cm} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$, $\quad h = \frac{28}{\sqrt{19}}\ cm$.

Die y-Koordinate des Punktes C ist $y_C = \frac{28}{19} \cdot \sqrt{19}$.

Berechnung der x-Koordinate von C:

$x_C^2 = b^2 - y_C^2$, $\quad x_C^2 = 49\ cm^2 - \frac{28^2}{19}\ cm^2$, $\quad x_C = \sqrt{\frac{147}{19}}\ cm$, $\quad x_C = 7 \cdot \sqrt{\frac{3}{19}}\ cm$.

Der Punkt C hat die Koordinaten $C\left(\frac{7}{19} \cdot \sqrt{57} \mid \frac{28}{19} \cdot \sqrt{19}\right)$.

Der Punkt D liegt in der Mitte der Seite a. Damit hat D die Koordinaten

$D\left(\frac{\sqrt{57} + \frac{7}{19} \cdot \sqrt{57}}{2} \mid \frac{14}{19} \cdot \sqrt{19}\right)$, $\quad D\left(\frac{\sqrt{57}}{2} \cdot \left(1 + \frac{7}{19}\right) \mid \frac{14}{19} \cdot \sqrt{19}\right)$, $\quad D\left(\frac{13}{19} \cdot \sqrt{57} \mid \frac{14}{19} \cdot \sqrt{19}\right)$.

Der Punkt F kann mit Hilfe des zweiten Teils des Strahlensatzes bestimmt werden. Die Längen der Strecken s_1 und s werden benötigt.

Berechnung von s_1: $\quad s_1^2 = b^2 + e^2 - 2 \cdot b \cdot e \cdot cos\,(\gamma_1)$,

$s_1^2 = 49\ cm^2 + \frac{28^2 \cdot 3}{11^2}\ cm^2 - 2 \cdot 7\ cm \cdot \frac{28}{11} \cdot \sqrt{3}\ cm \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$, $\quad s_1^2 = 49\ cm^2 + \frac{2352}{121}\ cm^2 - \frac{588}{11}\ cm^2$,

$s_1^2 = 49\ cm^2 - \frac{4116}{121}\ cm^2$, $\quad s_1^2 = \frac{1813}{121}\ cm^2$, $\quad s_1 = \frac{7}{11} \cdot \sqrt{37}\ cm$.

Berechnung von s: $\quad s^2 = b^2 + a_2^2 - 2 \cdot b \cdot a_2 \cdot cos\,(\gamma)$,

$s^2 = 49\ cm^2 + 16\ cm^2 - 2 \cdot 7\ cm \cdot\ 4\ cm \cdot \frac{1}{2}$, $\quad s^2 = 49\ cm^2 + 16\ cm^2 - 28\ cm^2$, $\quad s = \sqrt{37}\ cm$.

Dann ist $\quad \frac{y_F}{s_1} = \frac{y_D}{s}$, $\quad y_F = \frac{y_D}{s} \cdot s_1$, $\quad y_F = \frac{\frac{14}{19} \cdot \sqrt{19}}{\sqrt{37}\ cm} \cdot \frac{7}{11} \cdot \sqrt{37}\ cm$, $\quad y_F = \frac{14 \cdot 7 \cdot \sqrt{19}}{19 \cdot 11}$.

Die y-Koordinate des Punktes F ist $y_F = \frac{98}{209} \cdot \sqrt{19}$.

Berechnung von x_F:

$\frac{x_F}{y_F} = \frac{x_D}{y_D}$, $\quad x_F = \frac{x_D}{y_D} \cdot y_F$, $\quad x_F = \frac{\frac{13}{19} \cdot \sqrt{57}}{\frac{14}{19} \cdot \sqrt{19}} \cdot \frac{14 \cdot 7 \cdot \sqrt{19}}{19 \cdot 11}$, $\quad x_F = \frac{13}{19} \cdot \sqrt{57} \cdot \frac{7}{11}$, $\quad x_F = \frac{91}{209} \cdot \sqrt{57}$.

Der Punkt F hat die Koordinaten $F\left(\frac{91}{209} \cdot \sqrt{57} \mid \frac{98}{209} \cdot \sqrt{19}\right)$.