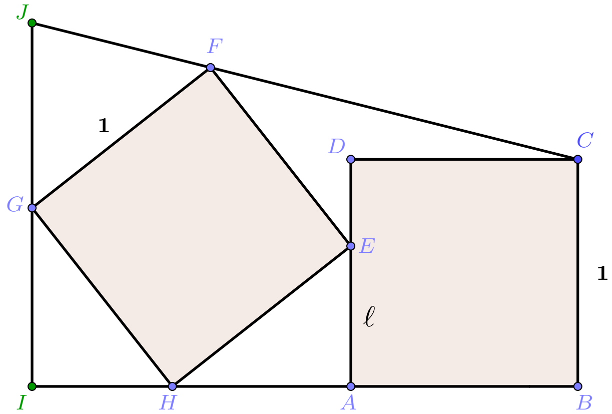
Zwei Quadrate im Trapez und ein Maximum

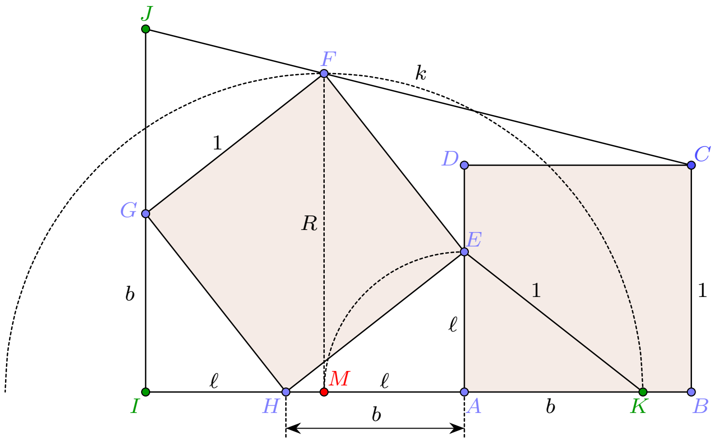
Die Seitenlänge beider Quadrate betrage 1.
Welche Länge besitzt $\ell = \overline{AE}$, damit $\overline{IJ}$ maximal wird.



Aufgabe von Michael Penn auf YouTube, gefunden von Ingmar Rubin, Berlin, am 10. Februar 2021

Lösung

Der Punkt A wird in den Koordinatenursprung gelegt. Die Dreiecke ΔIHG und ΔHAE sind nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent. Eine Spiegelung der Quadratseite $\overline{EH}$ an der y-Achse erzeugt die Strecke $\overline{EK}$ und ein weiteres, zu den beiden vorher genannten Dreiecken, kongruentes Dreieck ΔAKE . Ein Kreisbogen k mit dem Radius $R = \ell + b$ und der Gleichung $k : (x + \ell)^2 + y^2 = R^2$ schneidet die Stecke $\overline{CJ}$ in F. Der Mittelpunkt von k auf der x-Achse sei M. Der Punkt F hat die Koordinaten $F(-\ell \mid \ell + b)$. Im Dreieck ΔIHG ist $b = \sqrt{1 - \ell^2}$.



Eine Geradengleichung g durch die Punkte C und F kann aufgestellt werden , sie lautet

$$y - 1 = \frac{y_F - y_C}{x_F - x_C} \cdot (x - 1), \qquad y - 1 = \frac{\ell + b - 1}{-\ell - 1} \cdot (x - 1),$$

mit $b = \sqrt{1 - \ell^2}$, x_F in g

$$y(\ell) = \frac{\ell + \sqrt{1 - \ell^2} - 1}{-\ell - 1} \cdot (-\ell - \sqrt{1 - \ell^2} - 1) + 1,$$

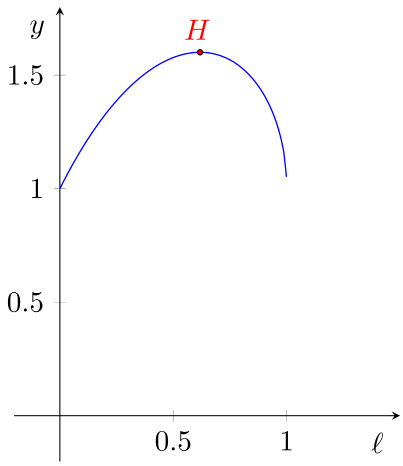
$$y(\ell) = \frac{\ell + \sqrt{1 - \ell^2} - 1}{\ell + 1} \cdot (\ell + \sqrt{1 - \ell^2} + 1) + 1,$$

$$y(\ell) = \frac{(\ell + \sqrt{1 - \ell^2})^2 - 1}{1 + \ell} + 1, \qquad y(\ell) = \frac{\ell^2 + 2 \cdot \ell \cdot \sqrt{1 - \ell^2} + 1 - \ell^2 - 1}{1 + \ell} + 1.$$

Der Hochpunkt der Funktion $y(\ell) = 2 \cdot \ell \cdot \sqrt{\frac{1 - \ell}{1 + \ell}} + 1$ kann ermittelt werden.

Er hat die Koordinaten $H(0{,}61803 \mid 1{,}60057)$.

Wenn ℓ eine Länge von $\ell = 0{,}61803$ LE hat, besitzt der Punkt J ist die Strecke $\overline{IJ} = 1{,}60057$ lang.


y
H
1.5
1
0.5
0.5
1
ℓ