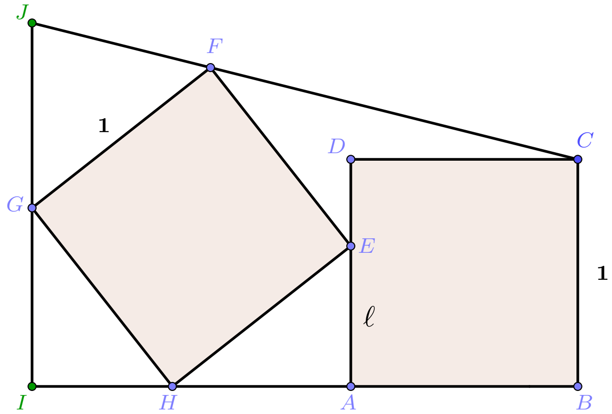
Zwei Quadrate im Trapez und ein Maximum

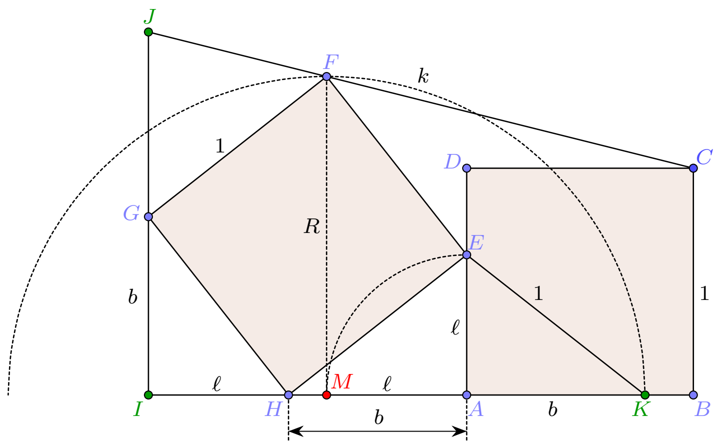
Die Seitenlänge beider Quadrate betrage 1.
Welche Länge besitzt $\ell = \overline{AE}$, damit $\overline{IJ}$ maximal wird.



Aufgabe von Michael Penn auf YouTube, gefunden von Ingmar Rubin, Berlin, am 10. Februar 2021

Lösung

Der Punkt A wird in den Koordinatenursprung gelegt. Die Dreiecke ΔIHG und ΔHAE sind nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent. Eine Spiegelung der Quadratseite $\overline{EH}$ an der y-Achse erzeugt die Strecke $\overline{EK}$ und ein weiteres, zu den beiden vorher genannten Dreiecken, kongruentes Dreieck ΔAKE . Ein Kreisbogen k mit dem Radius $R = \ell + b$ und der Gleichung $k : (x+\ell)^2+y^2 = R^2$ schneidet die Stecke $\overline{CJ}$ im Punkt F. Der Mittelpunkt von k auf der x-Achse sei M. Der Punkt F hat die Koordinaten $F(-\ell \mid \ell + b)$. Im Dreieck ΔIHG ist $b = \sqrt{1-\ell^2}$.



Eine Geradengleichung g durch die Punkte C und F kann aufgestellt werden , sie lautet

$$y-1 = \frac{y_F-y_C}{x_F-x_C}\cdot(x-1), \qquad y-1 = \frac{\ell+b-1}{-\ell-1}\cdot(x-1),$$

mit $b=\sqrt{1-\ell^2}$, x_F in g

$$y(\ell) = \frac{\ell+\sqrt{1-\ell^2}-1}{-\ell-1}\cdot\left(-\ell-\sqrt{1-\ell^2}-1\right)+1,$$

$$y(\ell) = \frac{\ell+\sqrt{1-\ell^2}-1}{\ell+1}\cdot\left(\ell+\sqrt{1-\ell^2}+1\right)+1,$$

$$y(\ell) = \frac{(\ell+\sqrt{1-\ell^2})^2-1}{1+\ell}+1, \qquad y(\ell) = \frac{\ell^2+2\cdot\ell\cdot\sqrt{1-\ell^2}+1-\ell^2-1}{1+\ell}+1.$$

Der Hochpunkt der Funktion $y(\ell) = 2\cdot\ell\cdot\sqrt{\frac{1-\ell}{1+\ell}}+1$ kann ermittelt werden.

notwendige Bed.: $y'(\ell)=0$

$$y'(\ell) = 2\cdot\sqrt{\frac{1-\ell}{1+\ell}}+\frac{\cancel{2}\cdot\ell\cdot(-(1+\ell)-(1-\ell))}{\cancel{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\ell}{1+\ell}}\cdot(1+\ell)^2},$$

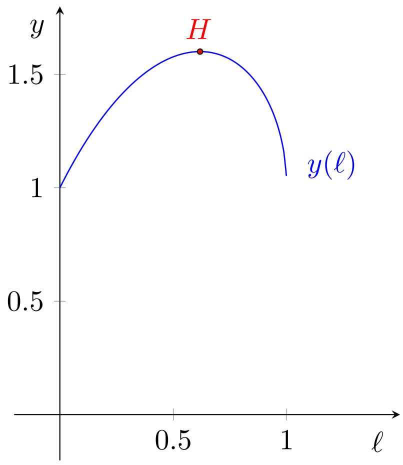
$$0 = \cancel{2}\cdot\sqrt{\tfrac{1-\ell}{1+\ell}} - \frac{\cancel{2}\cdot\ell}{\sqrt{\frac{1-\ell}{1+\ell}\cdot(1+\ell)^2}}, \qquad \frac{\ell}{\sqrt{\frac{1-\ell}{1+\ell}\cdot(1+\ell)^2}} = \sqrt{\tfrac{1-\ell}{1+\ell}},$$

$$\ell = \frac{1-\ell}{\cancel{1+\ell}}\cdot(1+\ell)^{\cancel{2}}, \qquad \ell = 1-\ell^2,$$

$$\ell^2+\ell-1=0, \qquad \ell_{1,2} = -\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}+1},$$

negative Lösung entfällt $\underline{\underline{\ell = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)}}$.

Auf die hinreichende Bedingung als Nachweis der Existenz des Maximums wird verzichtet, der Graph $y(\ell)$ zeigt den Hochpunkt.



Wird ℓ in Ausgangsgleichung eingesetzt, entsteht

$$y(\ell) = 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)}{1+\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)}}+1,$$
$$y(\ell) = (\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}+1,$$
$$y(\ell) = (\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}}+1,$$
$$y(\ell) = (\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{\frac{8-4\cdot\sqrt{5}}{-4}}+1,$$
$$y(\ell) = (\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}+1,$$
$$y(\ell) = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2\cdot(\sqrt{5}-2)}+1,$$
$$y(\ell) = \sqrt{(5-2\cdot\sqrt{5}+1)\cdot(\sqrt{5}-2)}+1,$$
$$y(\ell) = \sqrt{5\cdot\sqrt{5}-10-10+4\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}-2}+1,$$
$$y(\ell) = \sqrt{10\cdot\sqrt{5}-22}+1, \qquad \underline{\underline{y(\ell) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt{5}-11}+1}}.$$

Der Hochpunkt hat die Koordinaten $H(\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}-1) \mid \sqrt{2}\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt{5}-11}+1)$,
$H(0{,}61803 \mid 1{,}60057)$.

Die größte Ausdehnung hat die Strecke $\overline{IJ} = 1{,}60057\ LE$, wenn die Strecke ℓ eine Länge von $\ell = 0{,}61803\ LE$ besitzt.