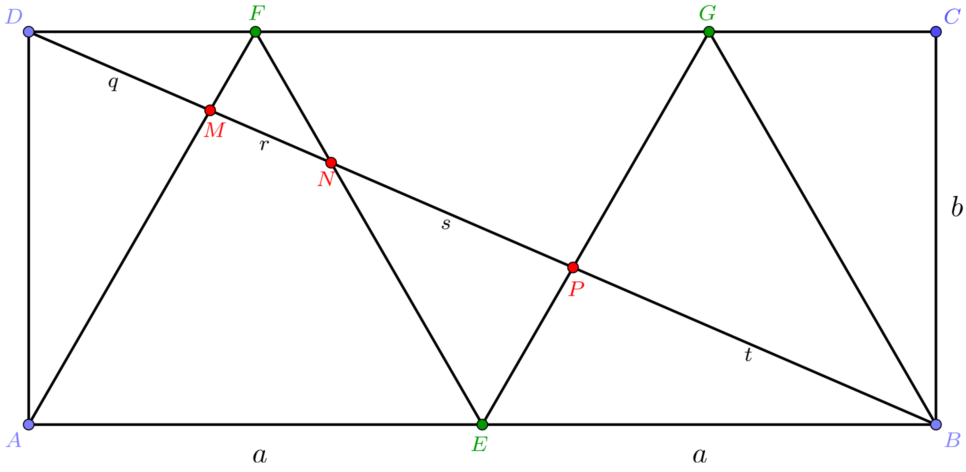
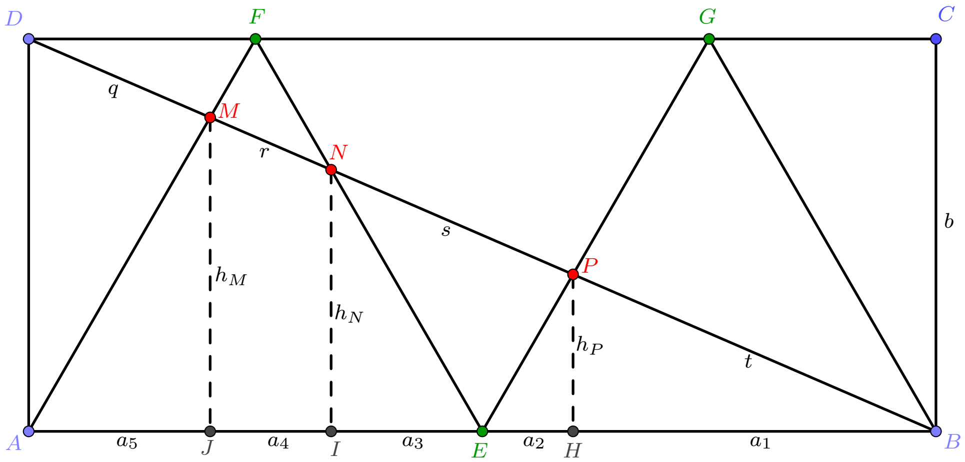
Zwei gleichseitige Dreiecke im Rechteck

Gegeben sei das Rechteck $\square ABCD$ mit der Grundseite $\overline{AB} = 2 \cdot a$. Dem Rechteck sind zwei gleichseitige Dreiecke ΔAEF und ΔEBG einbeschrieben. Die Diagonale $\overline{BD}$ schneidet die Dreieckseiten in den Punkten M, N und P.
Wie lang sind die eingezeichneten Strecken q, r, s und t in Abhängigkeit von a.



Aufgabe von Peter G. Nischke, Berlin, 27. Juni 2005

Lösung



Die Seite b des Rechtecks entspricht der Höhe des gleichseitigen Dreiecks, somit ist $b = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$.

Mit dem zweiten Teil des Strahlensatzes entsteht		$\frac{2 \cdot a}{b} = \frac{a_1}{h_P}$.	
Dann ist	$a_1 = \frac{2 \cdot a}{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}} \cdot h_P$,	$a_1 = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot h_P$	...(1).
Im ΔEHP gilt	$tan\,(60°) = \frac{h_P}{a_2}$,	$a_2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot h_P$	...(2).
(1)+(2)	$a_1 + a_2 = a$,	$a = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot h_P$	...(3).
Der Satz des Pythagoras liefert	$a_1^2 + h_P^2 = t^2$,		
mit (1)	$\frac{16}{3} \cdot h_P^2 + h_P^2 = t^2$,	$h_P = \sqrt{\frac{3}{19}} \cdot t$	...(4).
(4) in (3)	$a = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{19}} \cdot t$,	$a = \frac{5}{19} \cdot \sqrt{19} \cdot t$,	
	$\underline{\underline{t = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{19} \cdot a}}$		...(5).

Mit dem zweiten Teil des Strahlensatzes entsteht wiederum $\frac{2 \cdot a}{b} = \frac{a + a_3}{h_N}$.

Dann ist	$a_3 + a = \frac{2 \cdot a}{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}} \cdot h_N,$	$a_3 + a = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot h_N$	...(6).
Im ΔIEN gilt	$tan\,(60^\circ) = \frac{h_N}{a_3},$	$a_3 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot h_N$	...(7).
(7) in (6)	$a = \sqrt{3} \cdot h_N$	$h_N = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a$	...(8).
Im ΔIBN gilt	$(a_3 + a)^2 + h_N^2 = (s+t)^2,$		
mit (6)	$\frac{19}{3} \cdot h_N^2 = (s+t)^2,$	$s = \sqrt{\frac{19}{3}} \cdot h_N - t,$	
mit (8) und (5)	$s = \sqrt{\frac{19}{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a - \frac{1}{5} \cdot \sqrt{19} \cdot a,$	$\underline{\underline{s = \frac{2}{15} \cdot \sqrt{19} \cdot a}}$	...(9).
Der zweite Teil des Strahlensatzes liefert		$\frac{2 \cdot a}{b} = \frac{a + a_3 + a_4}{h_M}.$	
Dann ist	$a_4 + a_3 + a = \frac{2 \cdot a}{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}} \cdot h_M,$	$a_4 = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot h_M - a_3 - a$	...(10).
Im ΔAJM gilt	$tan\,(60^\circ) = \frac{h_M}{a_5},$	$a_5 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot h_M$	...(11).
(10)+(11)	$a_4 + a_5 = a - a_3,$	$a - a_3 = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot h_M - a_3 - a,$	
	$h_M = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{3} \cdot a$		...(12).
Im ΔJBM gilt	$(a_4 + a_3 + a)^2 + h_M^2 = (s+t+r)^2,$		
mit (10)	$\frac{19}{3} \cdot h_M^2 = (r+s+t)^2,$	$r = \sqrt{\frac{19}{3}} \cdot h_M - t - s,$	
mit (12), (5) und (9)	$r = \sqrt{\frac{19}{3}} \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt{3} \cdot a - \frac{1}{5} \cdot \sqrt{19} \cdot a - \frac{2}{15} \cdot \sqrt{19} \cdot a,$		
	$r = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5} - \frac{2}{15}\right) \cdot \sqrt{19} \cdot a,$	$\underline{\underline{r = \frac{1}{15} \cdot \sqrt{19} \cdot a}}$	...(13).

Die Diagonale $d = \overline{BD}$ kann mit dem Satz von Pythagoras berechnet werden, es ist

	$d^2 = (2 \cdot a)^2 + b^2,$	$d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19} \cdot a.$	
Die Strecke q ist dann	$q = d - r - s - t,$		
	$q = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19} \cdot a - \frac{1}{15} \cdot \sqrt{19} \cdot a - \frac{2}{15} \cdot \sqrt{19} \cdot a - \frac{1}{5} \cdot \sqrt{19} \cdot a,$		
	$q = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) \cdot \sqrt{19} \cdot a,$	$\underline{\underline{q = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{19} \cdot a.}}$	

Die Strecke s ist doppelt so lang wie r, weiterhin ist $t = r + s$.