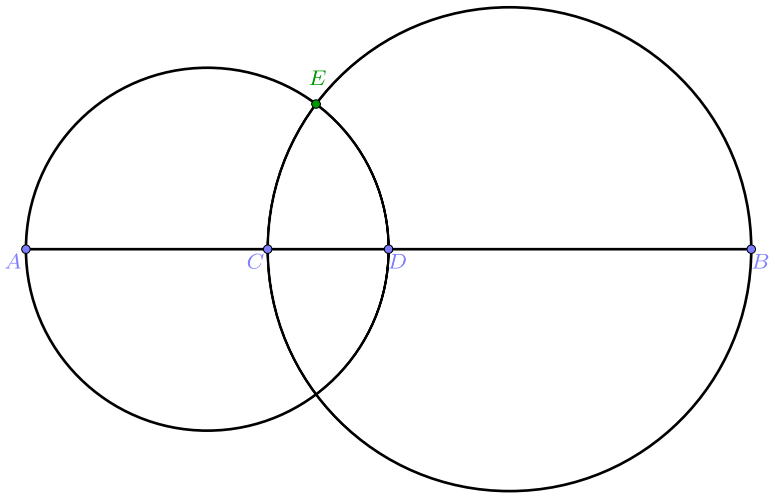
Zwei sich schneidende Kreise

„Zwei Kreise, die sich schneiden, das sieht nicht gerade spektakulär aus“, meinte Lisa zu Mike. „Ja und nein“.
Die Strecke $\overline{AB}$ ist 12 cm lang, die Radien der Kreise betragen 3 cm und 4 cm. Die Punkte A, B, C und D liegen auf der x-Achse eines Koordinatensystems (Descartes) mit $01 = 1$ cm und der Punkt C hat die Koordinaten $C(0;0)$.

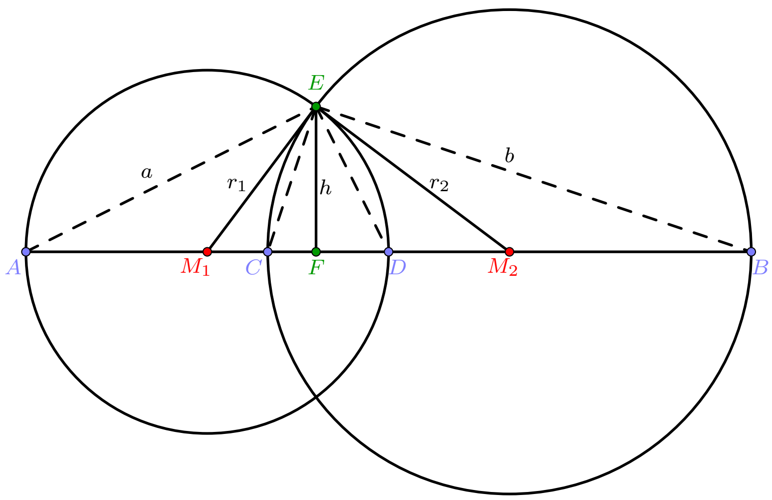
a) Welche Koordinaten hat der Punkt E?

b) Wie groß sind die Winkel $\sphericalangle AEB$, $\sphericalangle CED$ und $\sphericalangle DEB$?



Aufgabe der Woche 690 des Chemnitzer Schulmodells von Thomas Jahre, Chemnitz, vom 29.10.2021

Lösung



a) Alle Strecken haben die Einheit cm. Die Strecke $\overline{M_1M_2}$ sei c.
Wenn $\overline{AB} = 12$, so ist $c = 12 - 3 - 4$, $c = 5$.
Das Dreieck ΔM_1M_2E ist wegen der Umkehrung des Satzes von Pythagoras rechtwinklig, da $3^2 + 4^2 = 5^2$. Nach dem Kathetensatz ist
im Dreieck ΔM_1FE $r_1^2 = \overline{M_1F} \cdot c$, $\overline{M_1F} = \frac{3^2}{5}$
und im Dreieck ΔFM_2E $r_2^2 = \overline{FM_2} \cdot c$, $\overline{FM_2} = \frac{4^2}{5}$.
Mit dem Höhensatz ist $h^2 = \overline{M_1F} \cdot \overline{FM_2}$, $h^2 = \frac{9 \cdot 16}{5 \cdot 5}$, $h = \frac{12}{5}$.
Im Dreieck ΔFM_2E gilt $r_2^2 = \overline{FM_2}^2 + h^2$, $\overline{FM_2}^2 = 4^2 - \frac{144}{25}$, $\overline{FM_2} = \frac{16}{5}$.
Die Koordinaten von E sind $E\left(4 - \frac{16}{5} \mid \frac{12}{5}\right)$, $E\left(\frac{4}{5} \mid \frac{12}{5}\right)$.

b) Berechnung des Winkels $\sphericalangle AEB$:

Im Dreieck ΔFBE ist $\quad tan \sphericalangle FEB = \frac{\overline{BF}}{h}$, $\quad tan \sphericalangle FEB = \frac{2 \cdot r_2 - x_E}{h}$,

$tan \sphericalangle FEB = \frac{8-\frac{4}{5}}{\frac{12}{5}}$, $\quad tan \sphericalangle FEB = 3$,

$\sphericalangle FEB = 71{,}565°$.

Im Dreieck ΔAFE ist $\quad tan \sphericalangle AEF = \frac{\overline{AF}}{h}$, $\quad tan \sphericalangle AEF = \frac{r_1+c-r_2+x_E}{h}$,

$tan \sphericalangle AEF = \frac{3+5-4+\frac{4}{5}}{\frac{12}{5}}$, $\quad tan \sphericalangle AEF = 2$,

$\sphericalangle AEF = 63{,}435°$.

Die Summe beider Winkel ist $\quad \sphericalangle FEB + \sphericalangle AEF = \sphericalangle AEB$, $\quad \sphericalangle AEB = 71{,}565° + 63{,}435°$,

$\underline{\underline{\sphericalangle AEB = 135°}}$.

Berechnung des Winkels $\sphericalangle CED$:

Im Dreieck ΔFDE ist $\quad tan \sphericalangle FED = \frac{\overline{FD}}{h}$, $\quad tan \sphericalangle FED = \frac{r_2 - x_E - (c-r_1)}{h}$,

$tan \sphericalangle FED = \frac{4-\frac{4}{5}-(5-3)}{\frac{12}{5}}$, $\quad tan \sphericalangle FED = \frac{1}{2}$,

$\sphericalangle FED = 26{,}565°$.

Im Dreieck ΔCFE ist $\quad tan \sphericalangle CEF = \frac{\overline{CF}}{h}$, $\quad tan \sphericalangle CEF = \frac{x_E}{h}$,

$tan \sphericalangle CEF = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{12}{5}}$, $\quad tan \sphericalangle CEF = \frac{1}{3}$,

$\sphericalangle CEF = 18{,}435°$.

Die Summe beider Winkel ist $\quad \sphericalangle FED + \sphericalangle CEF = \sphericalangle CED$, $\quad \sphericalangle CED = 26{,}565° + 18{,}435°$,

$\underline{\underline{\sphericalangle CED = 45°}}$.

Berechnung des Winkels $\sphericalangle DEB$:

Der Winkel $\sphericalangle DEB$ ist $\quad \sphericalangle DEB = \sphericalangle FEB - \sphericalangle FED$, $\quad \sphericalangle DEB = 71{,}565° - 26{,}565°$,

$\underline{\underline{\sphericalangle DEB = 45°}}$.

Dementsprechend ist $\quad \sphericalangle AEC = 45°$.

Die Punkte A, C, D und B bilden eine harmonische Teilung, es ist $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$, $\frac{4}{2} = \frac{12}{6}$.

Die Strecke $\overline{CB}$ wird durch den Punkt D innen und durch den Punkt A außen harmonisch geteilt.