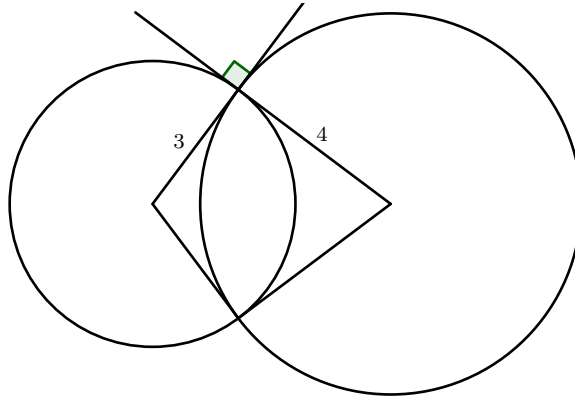


Zwei überlappende Kreise

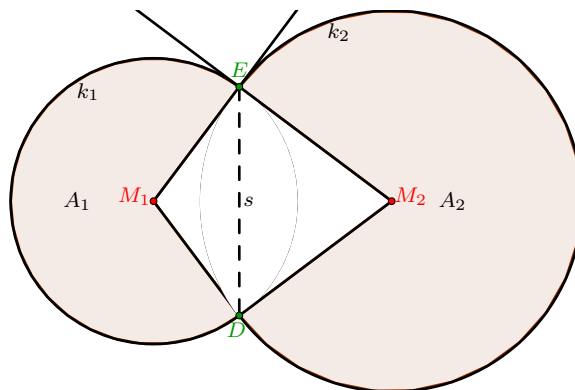
Zwei Kreise mit den Radien drei und vier Zentimeter sind so übereinandergeschoben worden, dass sich ihre Umfänge unter einem rechten Winkel schneiden.

- Wie groß ist die Differenz der Flächeninhalte der jeweils größeren Kreissektoren?
- Wie groß ist die Differenz der Flächeninhalte der sich nicht überlappenden Kreisteile?



Nach einer Aufgabe aus dem Kalenderblatt des 7. April 2021 von Heinrich Hemme

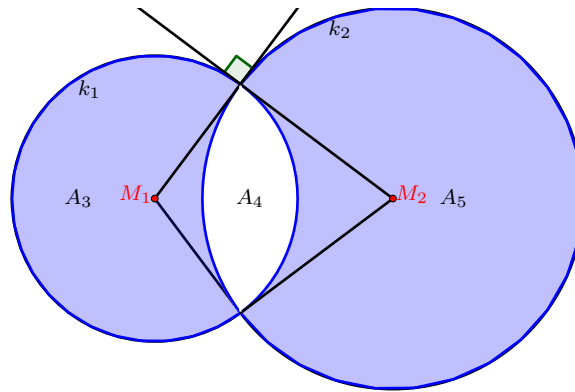
Lösung



- Der Abstand d der Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2 beträgt nach dem Satz von Pythagoras

$$d = \overline{M_1 M_2}, \quad d = \sqrt{(3 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2}, \quad d = 5 \text{ cm} \quad \dots(1).$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle M_1 M_2 E$ beträgt $A_D = \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}$, $A_D = 6 \text{ cm}^2$.
 Das Drachenviereck $\square M_1 D M_2 E$ hat somit einen Flächeninhalt von $A = 12 \text{ cm}^2$.
 Es ist $A = \frac{1}{2} \cdot d \cdot s$, $s = \frac{2 \cdot A}{d}$,
 die Sehne s ist mit (1) $s = \frac{2 \cdot 12 \text{ cm}^2}{5 \text{ cm}}$, $s = 4,8 \text{ cm}$ lang.
 Die Größe eines Zentriwinkels kann mit Hilfe der Gleichung $s = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ bestimmt werden.
 Zentriwinkel α von k_1 : $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2 \cdot r}$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{4,8 \text{ cm}}{2 \cdot 3 \text{ cm}}$,
 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$, $\alpha = 106,26^\circ$.
 Zentriwinkel β von k_2 : $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{s}{2 \cdot r}$, $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{4,8 \text{ cm}}{2 \cdot 4 \text{ cm}}$,
 $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{3}{5}$, $\beta = 73,74^\circ$.
 Die Flächeninhalte A_1 und A_2 werden mit der Kreissektorenformel $A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ}$ errechnet.
 Dann ist $A_1 = \pi \cdot 9 \text{ cm}^2 \cdot \frac{360^\circ - 106,26^\circ}{360^\circ}$, $A_1 = 19,93 \text{ cm}^2$,
 $A_2 = \pi \cdot 16 \text{ cm}^2 \cdot \frac{360^\circ - 73,74^\circ}{360^\circ}$, $A_2 = 39,97 \text{ cm}^2$,
 Differenz $\Delta A = A_2 - A_1$, $\Delta A = 39,97 \text{ cm}^2 - 19,93 \text{ cm}^2$, $\Delta A = 20,04 \text{ cm}^2$.
 Die Differenz der Flächeninhalte der jeweils größeren Kreissektoren beträgt $20,04 \text{ cm}^2$.



- b) Der Kreis k_1 habe den Flächeninhalt A_3 , der Kreis k_2 den Flächeninhalt A_5 und A_4 ist der Flächeninhalt, der von beiden Kreisen überlappt wird. Die Differenz der sich nicht überlappenden Kreisteile sei ΔA_{nKt} .

Dann ist

$$\begin{aligned} \Delta A_{nKt} &= A_5 - A_4 - (A_3 - A_4), & \Delta A_{nKt} &= A_5 - A_3, \\ \Delta A_{nKt} &= 4^2 \cdot \pi - 3^2 \cdot \pi, & \underline{\underline{\Delta A_{nKt} &= 7 \cdot \pi.}} \end{aligned}$$

Die Differenz der Flächeninhalte der sich nicht überlappenden Kreisteile beträgt $\Delta A_{nKt} = 7 \cdot \pi$.